

ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека Препринты ИПМ • Препринт № 35 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print) ISSN 2071-2901 (Online)

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

Гибридная модель стационарного плазменного двигателя

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Гибридная модель стационарного плазменного двигателя // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 35. 47 с. <u>https://doi.org/10.20948/prepr-2021-35</u> <u>https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-35</u> Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В.Келдыша Российской академии наук

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

Гибридная модель стационарного плазменного двигателя

Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Гибридная модель стационарного плазменного двигателя

Предложена математическая модель для исследования процессов в стационарном плазменном двигателе (СПД) с учётом ионизации рабочего вещества – ксенона, основанная на гибридных уравнениях электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) плазмы. Подробно рассмотрен 1D2V случай плоской симметрии, для которого построен численный алгоритм исследования решений гибридных ЭМГД-уравнений, базирующийся на методе макрочастиц. Дано решение ряда принципиальных вопросов: вычисление средних величин, интерполяция, построение начального распределения макрочастиц, выбор граничных условий для электрического поля и т.д. Приведены результаты расчётов с учётом и без учёта индукционных полей в СПД.

Ключевые слова: стационарный плазменный двигатель (СПД), гибридная электромагнитная гидродинамика (ЭМГД), метод макрочастиц, обобщённый закон Ома, ионизация плазмы, кинетические уравнения, уравнение характеристик

Mikhail Borisovich Gavrikov, Aleksei Aleksandrovich Taiurskii Hybrid model of a stationary plasma thruster

A mathematical model is proposed for studying the processes in a stationary plasma thruster (SPT) taking into account the ionization of the working substance -Xenon, based on the hybrid equations of electromagnetic hydrodynamics (EMHD) of the plasma. The 1D2V case of plane symmetry is considered in detail, for which a numerical algorithm for investigating solutions of hybrid EMHD equations is constructed, based on the method of macroparticles. The solution of a number of fundamental issues is given: the calculation of average values, interpolation, construction of the initial distribution of macroparticles, the choice of boundary conditions for the electric field, etc. The results of calculations with and without taking into account the induction fields in the SPT are presented.

Key words: stationary plasma thruster (SPT), hybrid electromagnetic hydrodynamics (EMHD), macroparticle method, generalized Ohm's law, plasma ionization, kinetic equations, equation of characteristics

Введение

Исследование процессов в стационарных плазменных двигателях (СПД) – по-прежнему актуальная задача плазмодинамики. СПД были предложены А.И. Морозовым. Первые испытания СПД прошли в конце 1971 г., и свыше 40 лет они успешно используются для коррекции орбит космических летательных История вопроса отражена в [1–3]. Согласно аппаратов. упрощённой принципиальной схеме, приведённой на рис. 1, СПД представляет собой коаксиальную камеру с керамическими боковыми стенками, в торцах которой расположены анод и катод с подведённой к ним разностью потенциалов, приводящей к появлению в камере электрического поля *E*. Кроме того, система обмоток с постоянными токами создаёт в камере почти радиальное магнитное поле *H*. Нейтральный газ – ксенон Хе – подаётся в СПД со стороны анода, ионизуется посредством ударной ионизации электронами, И возникающие ионы ксенона ускоряются продольным электрическим полем E и покидают камеру в сторону катода, нейтрализуясь на нём. В результате возникает реактивная сила тяги, на получение которой и направлена работа СПД.



Рис. 1. Принципиальная схема СПД

Анализ основных процессов в СПД – ионизации рабочего вещества (ксенона) в прианодной области камеры, ускорения образующихся ионов ксенона, рассеяния электронов и ионов на боковых керамических стенках – достаточно сложен и до сих пор не доведён до обоснованных инженерных методик расчёта, дающих возможность получать характеристики проектируемых установок СПД с приемлемой точностью. На сегодняшний день имеется достаточно противоречивая физическая картина процессов в СПД. Предварительно приведём таблицу основных параметров плазмы в СПД.

Температура электронов, эв	$T_e = 10 - 20$ эв
Концентрация плазмы, см ⁻³	$n_i = 5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$
Поток нейтрального газа, мг / с	0.8 мг / с
Концентрация нейтрального газа, см ⁻³	$n_{Xe} = 2 \cdot 10^{13} \mathrm{cm}^{-3}$
Магнитное поле, Т	H = 0.02T
Радиус Дебая, см	$r_D = 5 \cdot 10^{-3} \mathrm{cm}$
Радиус Лармора электрона, см	$r_{Ae} = 2 \cdot 10^{-1}$ см
Радиус Лармора иона, см	$r_{Ai} = 100$ cm
Длина камеры, см	L = 3 - 5 cm

Основные параметры плазмы СПД

Считается, что плазма в СПД сильно замагничена, а магнитное поле Н почти радиальное, по крайней мере в зоне ускорения ионов. Как следствие, электроны двигаются по спиралям радиуса r_{Ae} вдоль силовых линий магнитного поля. Учитывая $r_{Ai} >> L$, траектории ионов магнитное поле практически не искривляет. На физическом уровне строгости отсюда следует, что в гидродинамическом для электронов приближении $v_e \parallel H$, а T_e постоянна вдоль силовых линий магнитного поля. С другой стороны, в скрещенных полях E, H электроны дрейфуют со скоростью $c[E,H]/H^2$, т.е., с учётом $E \perp H$, в азимутальном направлении. Таким образом, электроны "привязаны" к силовым линиям магнитного поля *H*, вдоль которых они двигаются, одновременно вращаясь по азимуту, между боковыми стенками камеры, отражаясь от последних по определённому закону, но почти не перемещаются вдоль оси камеры. В итоге, в СПД возникает электронное облако, вращающееся вокруг оси установки и болтающееся по радиусу между боковыми керамическими стенками камеры. Атомы Хе, попадая в это облако, ионизуются электронным ударом, а возникающие ионы ускоряются продольным электрическим полем Е, продираясь сквозь неподвижное в осевом направлении электронное облако. Нарисованная картина носит весьма грубый, ориентировочный характер и, по сути, базируется на физической интуиции разработчиков СПД, начиная с А.И. Морозова. В ней много "белых" пятен и противоречивых моментов. Основные вопросы: откуда возникает и какова природа электрического поля E, ускоряющего ионы? Простейший ответ – Е определяется заданной разностью потенциалов между анодом И катодом, В частности, E имеет электростатическую природу. Более сложный вариант – пренебрегая инерцией

электронов, ИЗ уравнения импульсов для электронов получим $\boldsymbol{E} = \nabla P_e / (en) - [\boldsymbol{v}_e, \boldsymbol{H}] / c.$ последнем В случае плазма считается квазинейтральной, $n = n_i = n_a$, а поле *E* имеет электромагнитную природу. В частности, для стационарного течения в СПД можно рассмотреть потенциал Φ электрического поля, $E = -\nabla \Phi$, и тогда из $v_e \parallel H$ и постоянства T_e вдоль силовых линий магнитного поля с учётом уравнения состояния $p_e = k_{\rm F} n T_e$ величина $\Phi - (k_{\rm F}T_e/e) \ln n$, называемая *термолизованным* вытекает, что потенциалом [4], сохраняется вдоль силовых линий магнитного поля. Идея термолизованного потенциала используется во многих исследованиях по СПД, в частности, при математическом и численном моделировании плазмы [5, 6], но, как следует из §1, она, скорее всего, ошибочна. Вопрос о природе электрического поля Е – электростатическое оно или электромагнитное – весьма важен для понимания процессов в СПД. В первом случае Е обусловлено разделением зарядов, начиная с противоположных зарядов анода и катода и кончая возможным объёмным разделением зарядов плазмы СПД [7]. Во втором случае Е возникает в результате генерации магнитного поля в плазме в предположении её квазинейтральности [8]. Электростатическое поле между анодом и катодом провоцирует начальное азимутальное вращение электронов, ударную ионизацию атомов Хе и пр., но основная его задача не ускорить ионы Xe⁺, а эмитировать с катода достаточное количество электронов для нейтрализации рождающихся в СПД ионов Хе. Поэтому катод обычно катодом-компенсатором. Рассмотрения называется **§**1 указывают на электромагнитную природу поля E, в частности, будет приведено существенно более точное выражение для **E**, демонстрирующее, помимо всего, ошибочность идеи термолизованного потенциала.

С основным вопросом тесно связан вопрос о роли индукционного электромагнитного поля, порождаемого плазменными токами и зарядами. Надо ли учитывать индукционное поле при расчёте динамики плазмы в СПД, будет ли от него зависеть и насколько сильно, например, сила тяги и т.д.? Если эта роль ничтожно мала, то расчёт процессов в СПД сильно упрощается – необходимо исследовать динамику плазмы в камере установки с учётом объёмной ионизации и рассеяния электронов и ионов на боковых стенках во внешнем электромагнитном поле, создаваемом обмотками катушек СПД и разностью потенциалов между анодом и катодом. Как показало ниже исследование, индукционное электромагнитное поле существенно влияет на силу тяги и пренебречь им нельзя.

Как следует из таблицы параметров, для ионов и нейтралов необходимо кинетическое описание, а для электронов возможно сохранить (особенно с

электронов) учётом сильной замагниченности гидродинамическое приближение. При этом обязателен учёт инерции электронов, плазма может квазинейтральная, И, принимая рассматриваться как BO внимание низкочастотный, нерелятивистский характер процессов ионизации и ускорения, пренебречь. Перечисленным током смещения следует требованиям гибридная ЭМГД-модель удовлетворяет плазмы [9]. изложенная применительно к СПД в §1. Согласно табл. 1, значения погонного числа частиц плазмы в СПД столь малы, что МГД-представления при математическом моделировании процессов в СПД совершенно неприменимы. С другой стороны, полностью (для ионов, нейтралов и электронов) кинетическое описание наталкивается на серьёзные физические и вычислительные проблемы, приводящие к дискуссионности получаемых на этом пути результатов [10].

В §2 рассмотрен численный метод макрочастиц, в §3 изложены результаты численных исследований решений одномерной (точнее 1D2V) задачи, возникающей в случае плоской симметрии уравнений гибридной ЭМГД-модели СПД.

§1. Гибридная ЭМГД-модель плазмы в СПД

Перечислим физические упрощения, лежащие в основании математической модели плазмы в СПД.

- Плазма трёхкомпонентная, состоящая из электронов, ионов Xe и нейтралов (атомы Xe).
- Кратность заряда иона Z = 1.

Согласно экспериментальным данным, доля двукратно ионизованных атомов Хе составляет 10–20% от общего числа ионов, ионы с более высокой степенью ионизации практически отсутствуют.

• Плазма в СПД квазинейтральная.

Действительно, согласно табл. 1, $r_D = 5 \cdot 10^{-3}$ см << L.

- Токи смещения равны нулю.
- Инерция электронов конечна.

Согласно [9], влияние инерции электронов в динамике низкочастотной нерелятивистской квазинейтральной плазмы определяется погонным числом частиц плазмы, а точнее, безразмерным параметром $\xi = \frac{c\sqrt{m_im_e}}{e\sqrt{4\pi n(m_i + m_e)}} \cong \frac{cm_e^{1/2}}{e\sqrt{4\pi n}}$. Необходимое условие пренебрежимой малости

инерции электронов в динамических процессах заключается в соотношении $\xi <<1$. Для плазмы СПД $\xi \simeq 0.75 \sim 1$ и учёт инерции электронов обязателен.

• Ионы и нейтралы кинетические, а электроны гидродинамические.

Перечисленным физическим допущениям удовлетворяет гибридная модель электромагнитной гидродинамики плазмы (ЭМГД) [9], которая применительно к плазме СПД сводится к следующим положениям.

Кинетика ионов и нейтралов. Пусть $f_i(t, x, v)$, $f_0(t, x, v) - функции распределения ионов и нейтралов по скоростям. Постулируются следующие уравнения для <math>f_i$, f_0 :

$$\partial f_i / \partial t + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} f_i \rangle + \langle F, \nabla_{\mathbf{v}} f_i \rangle = \beta n_i f_0, \\ \partial f_0 / \partial t + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} f_0 \rangle = -\beta n_i f_0,$$

где $\beta = \beta(T_e)$ – заданная функция электронной температуры (коэффициент ионизации).

 $n_{i} = \int_{\mathbb{R}^{3}} f_{i} d\mathbf{v} - \text{концентрация электронов,}$ $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = em_{i}^{-1} (E + c^{-1}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]) - \mathbf{R}_{i} m_{i}^{-1} n_{i}^{-1}, \quad \mathbf{R}_{i} = e^{2} n_{i} n_{e} \sigma^{-1} (\mathbf{v}_{i} - \mathbf{v}_{e}) = \mathbf{j} e n_{i} \sigma^{-1},$ $\sigma - \text{проводимость плазмы,} \quad n_{i} = n_{e} (\text{условие квазинейтральности}),$

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{j} / (en_i), \quad \boldsymbol{v}_i = n_i^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{v} f_i d\boldsymbol{v},$$

E = E(t, x), H = H(t, x) – напряжённости электрического и магнитного полей, *j* – плотность тока плазмы СПД.

В простейшем случае $\beta \equiv \beta_0 = \text{const}$ и для типичных параметров СПД $\beta = 10^{-8} \text{ см}^3 / \text{ с.}$ В более сложном варианте $\beta(T) = \alpha \max\{T - T_*, 0\} = (\alpha / 2)[T - T_* + |T - T_*|],$ где $\alpha > 0, T_*$ – заданные константы.

Гидродинамика электронов

• Электроны, возникающие при ионизации, имеют нулевые импульсы и энергии.

Поэтому при гидродинамическом описании электронов меняется только уравнение неразрывности, и мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_e \boldsymbol{v}_e &= \beta \rho_e n_0, \quad \rho_e = m_e n_e, \quad n_0 = \int_{\mathbb{R}^3} f_0 d\boldsymbol{v} \text{ (уравнение неразрывности),} \\ \frac{\partial \rho_e \boldsymbol{v}_e}{\partial t} + \operatorname{Div} \rho_e \boldsymbol{v}_e \cdot \boldsymbol{v}_e &= -\nabla P_e - e n_e \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} [\boldsymbol{v}_e, \boldsymbol{H}] \right) - \boldsymbol{R}_e + \operatorname{Div} \boldsymbol{\Pi}_e \end{aligned}$$

(уравнение импульсов),

$$\rho_e T_e \frac{dS_e}{dt} = \frac{m_i}{m_{\Sigma}} \frac{j^2}{\sigma} - \operatorname{div} \boldsymbol{q}_e + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Pi}_e D_e) + Q_e$$
(уравнение энергии),

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_e \cdot \nabla$, $m_{\Sigma} = m_i + m_e$, $\mathbf{R}_e = -\mathbf{R}_i$, Π_e – тензор вязких напряжений в электронной жидкости, \mathbf{q}_e – поток тепла, Q_e – энергия, получаемая от ионов при упругих столкновениях, $D_e = \text{def}\mathbf{v}_e$ – тензор деформаций для электронов. Постулируем для \mathbf{q}_e , Π_e соотношения

$$\boldsymbol{q}_e = -\chi_e \nabla T_e$$
 (закон Фурье), $\Pi_e = 2\mu_e D_e + (\eta_e - (2/3)\mu_e) \operatorname{tr} D_e \mathrm{I}_3.$

 Q_e – член, определяющий релаксацию температур электронов и ионов. Если $T_i = \int_{\mathbb{R}^3} ((v - v_i)^2 f_i / 3) dv$ – локальная температура ионов в эргах, то $Q_e = b(T_i - T_e)$. Коэффициент релаксации *b*, коэффициенты теплопроводности χ_e , 1-й и 2-й вязкостей электронов μ_e , η_e вычисляются по известным формулам [11–14], равно как и спитцеровская проводимость σ . Для простоты считаем $\eta_e = 0$, а для χ_e , μ_e , σ , *b* имеем: $\sigma = \sigma_0 T_e^{3/2}$, $\mu_e = \mu_0 T_e^{5/2}$, $\chi_e = \chi_0 T_e^{5/2}$, $b = b_0 \rho_e^2 / T_e^{3/2}$, где $\sigma_0 = 10^7 \cdot 0.905$, $\mu_0 = 10^{-16} \cdot 0.278$, $\chi_0 = 10^{-4} \cdot 0.365$, $b_0 = 10^{35} \cdot 1.37$ и T_e вычисляется в *K*, равно как и T_i , T_e в формуле для Q_e .

Наконец, должны быть заданы уравнения состояния электронной сплошной среды для термодинамических параметров ρ_e , S_e , P_e , ε_e , T_e , подчиняющихся термодинамическому тождеству

$$T_e dS_e = d\varepsilon_e + P_e d(\rho_e^{-1}).$$

Считая электроны идеальным политропным газом с показателем адиабаты $\gamma > 1$, имеем

$$\varepsilon_e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P_e}{\rho_e}, \quad T_e = \frac{\gamma - 1}{k_b} m_e \varepsilon_e = \frac{P_e}{k_b n_e}.$$

С помощью уравнений состояния, уравнения неразрывности и термодинамического тождества можно переписать уравнение энергии относительно любого термодинамического параметра P_e , ε_e , T_e . Например, из термодинамического тождества и уравнения состояния для ε_e следует

$$\begin{split} \rho_e T_e \frac{dS_e}{dt} &= \rho_e \left[\frac{d\varepsilon_e}{dt} + P_e \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \right] = \rho_e \left[\frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho_e} \frac{dP_e}{dt} - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P_e}{\rho_e^2} \frac{d\rho_e}{dt} - \frac{P_e}{\rho_e^2} \frac{d\rho_e}{dt} \right] = \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dP_e}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_e \operatorname{div} \mathbf{v}_e - \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_e \beta n_0, \end{split}$$

где использована эквивалентная форма уравнения неразрывности $d\rho_e / dt = -\rho_e \operatorname{div} v_e + \beta \rho_e n_0$. Откуда уравнение энергии переписывается относительно давления в виде:

$$\partial P_e / \partial t + \mathbf{v}_e \nabla P_e + \gamma P_e \operatorname{div} \mathbf{v}_e = (\gamma - 1) \{ \ldots \} + \gamma P_e \beta n_0$$

где {...} – правая часть уравнения энергии. Аналогичные выкладки приводят ещё к двум эквивалентным видам уравнения энергии:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{v}_e \nabla \varepsilon_e + (\gamma - 1)\varepsilon_e \operatorname{div} \mathbf{v}_e = \frac{1}{\rho_e} \{ \dots \} + (\gamma - 1)\varepsilon_e \beta n_0,$$
$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \nabla T_e + (\gamma - 1)T_e \operatorname{div} \mathbf{v}_e = \frac{\gamma - 1}{k_b n_e} \{ \dots \} + (\gamma - 1)T_e \beta n_0$$

Уравнения электродинамики. Поля *E*, *H*, *j* ищутся из законов электродинамики

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$
 + rot $E = 0$ (закон Фарадея), div $H = 0$, rot $H = \frac{4\pi}{c}j$ (закон Ампера).

Недостающее уравнение для *E*, называемое *обобщённым законом Ома*, получается из уравнения импульсов для ионов, являющегося следствием уравнения кинетики для f_i :

$$\frac{\partial m_i n_i \boldsymbol{v}_i}{\partial t} + \operatorname{Div} m_i n_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i + \operatorname{Div} P_i = e_i n_i \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] \right) - \boldsymbol{R}_i + \beta n_i m_i n_0 \boldsymbol{v}_0,$$
$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{1}{n_0} \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{v} f_0 d\boldsymbol{v}, \quad P_i = \left[P_i^{k\ell} \right], \quad P_i^{k\ell} = m_i \int_{\mathbb{R}^3} (v^k - v_i^k) (v^\ell - v_i^\ell) f_i d\boldsymbol{v},$$

где P_i – тензор внутренних напряжений ионов. Написанное уравнение импульсов для ионов получается умножением уравнения кинетики для f_i на v с последующей интеграцией по скоростному пространству. При этом используется очевидное равенство div_vF = 0 и предполагается, что функция распределения f_i в скоростном пространстве убывает на бесконечности быстрее любой степени $\|v\|^{-k}$, k = 0, 1, 2, ...: $\lim_{\|v\|\to\infty} f_i \|v\|^k = 0$, k = 0, 1, 2, ..., где $\|v\| -$ евклидова норма вектора v. Детальный вывод см. в [9]. Деля уравнение импульсов для ионов на $\lambda_i = m_i / e$ и вычитая почленно из полученного тождества уравнение импульсов для электронов, делённоена $\lambda_e = m_e / e$, получим искомое уравнение для E:

$$\boldsymbol{E} + \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi \lambda_{\Sigma} n_i} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} + \frac{\lambda_i \lambda_e}{\lambda_{\Sigma}} \beta n_0 \boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{1}{e n_i \lambda_{\Sigma}} \operatorname{Div} \boldsymbol{W}$$

(обобщённый закон Ома),

$$W = \lambda_i \lambda_e (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{j}) + \lambda_i \frac{\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}}{4\pi} - \frac{\lambda_i \lambda_e}{en_i} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} + \left[\lambda_e P_i - \lambda_i \left(\frac{\boldsymbol{H}^2}{8\pi} + P_e \right) \mathbf{I}_3 \right] + \lambda_i \Pi_e,$$

где $\lambda_{\Sigma} = \lambda_i + \lambda_e$, I_3 – единичный тензор, W называется холловским тензором, поскольку его слагаемые определяют отклонение электрического поля E от направления тока j в плазме (эффект Холла).

Уравнение неразрывности для электронов – следствие уравнения кинетики для ионов и получается из последнего интеграцией его по скоростному пространству [9]. Таким образом, от гидродинамики электронов остаётся только уравнение энергии, которое удобно записать относительно температуры T_e .

В итоге получаем следующую замкнутую определённую систему интегродифференциальных уравнений для нахождения функций $f_i(t, x, v)$, $f_0(t, x, v)$, $T_e(t, x)$, H(t, x), E(t, x), определяющих динамику плазмы в СПД

где β , σ – известные функции от T_e , выражения для которых, равно как и для $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, тензоров W, Π_e , D_e , вектора q_e и величины Q_e , указаны выше, $n_e = n_i$, $P_e = k_B n_e T_e$.

Система (1) должна быть дополнена начальными и граничными условиями, о которых имеет смысл говорить применительно к конкретным задачам.

Сделаем несколько замечаний, уточняющих приведённые выше положения.

1) Модифицированная проводимость плазмы в СПД. В работах по СПД часто используется модифицированная проводимость плазмы [4, 8]

$$\sigma = \sigma_s \left[1 + \left(\frac{\omega_{ce}}{\sigma_s} \right)^2 \right]^{-1},$$

где $\sigma_s = \sigma_0 T_e^{3/2}$ – спитцеровская проводимость плазмы (см. выше), а $\omega_{ce} = eH / (m_e c)$ – циклотронная частота электронов. При $H \to 0$, очевидно, $\sigma \to \sigma_s$, а при $H \to +\infty$ имеем $\sigma \to 0$, в частности, плазма с сильно замагниченными электронами практически не проводит электрический ток.

2) Формула для *E* при стационарном течении в СПД. Для стационарных течений в СПД из обобщённого закона Ома имеем следующее выражение для электрического поля *E*:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\lambda_i \lambda_e}{\lambda_{\Sigma}} \beta n_0 \boldsymbol{v}_0 + \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{cen_i \lambda_{\Sigma}} [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] + \frac{1}{en_i \lambda_{\Sigma}} \operatorname{Div} \{\lambda_i \lambda_e (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{j}) - \frac{\lambda_i \lambda_e}{en_i} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} + (\lambda_e P_i - \lambda_i P_e \mathbf{I}_3) + \lambda_i \Pi_e \}, \quad \boldsymbol{E} = -\nabla \boldsymbol{\Phi}.$$

Подставляя в это соотношение $v_i = v_e + j/(en_i)$, заключаем, что потенциал Φ может быть термолизован (см. Введение) лишь в исключительных случаях. Анализ полученной формулы для E требует дополнительной работы. Из неё следует, например, что электрическое поле в стационарных течениях плазмы в СПД возбуждается, в том числе, вязкими напряжениями в электронах.

3) Укороченный холловский тензор. Часто удобно использовать укороченный холловский тензор *W* :

$$W = \lambda_i \lambda_e (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{j}) - \frac{\lambda_i \lambda_e}{en_i} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} + (\lambda_e P_i - \lambda_i P_e \mathbf{I}_3) + \lambda_i \Pi_e.$$

Тогда Div $W = DivW + \frac{\lambda_i}{c}[j, H]$. Преимущество W в том, что он зависит от H только через вектор $j = \frac{c}{4\pi}$ rotH. Рассмотрим, например, зависимость решений системы (1) от внешнего магнитного поля H_{ext} . Полное магнитное поле H в системе (1) является суммой индукционного магнитного поля H_{ind} , порождаемого плазменными токами, и внешнего магнитного поля H_{ext} , $H = H_{ind} + H_{ext}$. Поле $H_{ext} = H_{ext}(x)$ – стационарное магнитное поле, создаваемое постоянными токами обмоток СПД. Поле H_{ext} при решении системы (1) считается заданным. В камере установки оно удовлетворяет соотношениям rot $H_{ext} = 0$, div $H_{ext} \equiv 0$. Поэтому для нахождения индукционного магнитного поля H_{ind} обозначить через H) изменится только одно уравнение – обобщённый закон Ома:

$$\boldsymbol{E} + \frac{c^{2}\lambda_{i}\lambda_{e}}{4\pi e n_{i}\lambda_{\Sigma}} \operatorname{rotrot}\boldsymbol{E} + \frac{\lambda_{i}\lambda_{e}}{\lambda_{\Sigma}}\beta n_{0}\boldsymbol{v}_{0} = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_{i}, \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_{ext}] + \frac{\lambda_{i}}{e n_{i}\lambda_{\Sigma}}\frac{1}{c}[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_{ext}] + \frac{1}{e n_{i}\lambda_{\Sigma}}\operatorname{Div}\boldsymbol{W},$$

а выражение для силы *F* примет вид $F = \frac{1}{\lambda_i} \left(E + \frac{1}{c} [v, H + H_{ext}] \right) - \frac{j}{\lambda_i \sigma}$. При $|H| = |H_{ind}| << |H_{ext}|$ в указанных выражениях в векторных произведениях всюду можно пренебречь *H* по сравнению с H_{ext} , и мы получим упрощённую модель

для расчёта динамики плазмы в СПД.

4) Уравнение для *E* в случае осевой симметрии. При решении эволюционной системы (1) в каждый момент времени *t* поле *E* ищется в некоторой области *D*, определяемой конструкцией установки СПД, из стационарной системы типа:

$$\boldsymbol{E} + a \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{f}, \tag{2}$$

где a = a(t, x) > 0, f = f(t, x), $x \in D$. Тождество (2) является системой уравнений в частных производных второго порядка относительно компонент поля E. Нетрудно проверить [9], что характеристическая форма этой системы тождественно равна нулю, поэтому система (2) заведомо не является эллиптической в области D ни на каком своём решении. Однако она может быть сведена [9] к эллиптической системе. Эта редукция особенно проста в наиболее важном осесимметричном случае, когда система (2) принимает вид:

$$E_{r} - a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_{r}}{\partial z} - \frac{\partial E_{z}}{\partial r} \right) = f_{r},$$

$$E_{\varphi} - a \left(\frac{\partial^{2} E_{\varphi}}{\partial z^{2}} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r E_{\varphi}}{\partial r} \right) \right) = f_{\varphi},$$

$$E_{z} + \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\partial E_{r}}{\partial z} - \frac{\partial E_{z}}{\partial r} \right) \right) = f_{z}.$$
(3)

Из (3) следует, что в осесимметричном случае система (2) распадается на независимые друг от друга эллиптическое уравнение относительно E_{φ} и подсистему из двух уравнений относительно E_r , E_z . Эта подсистема, образованная первым и третьим уравнениями (3), равносильна некоторому эллиптическому уравнению. Действительно, введём функцию

$$u = (\operatorname{rot} \boldsymbol{E})_{\varphi} = \frac{\partial \boldsymbol{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial \boldsymbol{E}_z}{\partial r}.$$
(4)

Зная *и*, из (3) находим

$$E_r = f_r + a \frac{\partial u}{\partial z}, \quad E_z = f_z - \frac{a}{r} \frac{\partial r u}{\partial r}.$$
 (5)

Подставляя (5) в (4), получим эллиптическое уравнение для нахождения и:

$$u - \frac{\partial}{\partial z} \left(a \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a}{r} \frac{\partial r u}{\partial r} \right) = \frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r}.$$
 (6)

Итак, если Е, Е, – решение подсистемы, образованной первым и третьим уравнениями (3), то функция и, определяемая формулой (4), является решением эллиптического уравнения (6). Обратно, если и – решение эллиптического уравнения (6) и E_r , E_z вычисляются по формулам (5), то они дают решение подсистемы, образованной первым и третьим уравнениями (3). формулы (4), (5) устанавливают взаимно-однозначное Таким образом, соответствие между решениями эллиптического уравнения (6) и решениями системы уравнений, образованной первым и третьим уравнениями (3). Итак, решение системы (2)для нахождения электрического поля E В осесимметричном случае сводится к решению сводится к решению двух независимых эллиптических уравнений относительно E_{φ} и (rot E_{φ}).

Рассмотрим решения системы (1), обладающие плоской симметрией $(\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0)$, т.е. вида $f_i = \delta(v_x)f_i(t, z, v_y, v_z)$, $f_0 = \delta(v_x)f_0(t, z, v_y, v_z)$, $T_e(t, z)$, H(t, z), E(t, z), для которых $E_x = 0$, $H_y = H_z = 0$, а заданное внешнее магнитное поле направлено вдоль оси x, $H_{ext} = (H_0(z), 0, 0)$. Тогда неизвестные функции $f_i(t, z, v_y, v_z)$, $f_0(t, z, v_y, v_z)$, $T_e(t, z)$, $H_x(t, z)$, $E_y(t, z)$, $E_z(t, z)$ ищутся из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{i}}{\partial t} + v_{z} \frac{\partial f_{i}}{\partial z} + \frac{e}{m_{i}} \left[E_{y} + \frac{(H_{x} + H_{0})v_{z}}{c} - \frac{j_{y}}{\sigma} \right] \frac{\partial f_{i}}{\partial v_{y}} + \frac{e}{m_{i}} \left[E_{z} - \frac{(H_{x} + H_{0})v_{y}}{c} \right] \frac{\partial f_{i}}{\partial v_{z}} = \\ &= \beta n f_{0}, \\ \frac{\partial f_{0}}{\partial t} + v_{z} \frac{\partial f_{0}}{\partial z} = -\beta n f_{0}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial H_{x}}{\partial t} - \frac{\partial E_{y}}{\partial z} = 0, \quad j_{y} = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_{x}}{\partial z}, \\ E_{y} - \frac{c^{2} \lambda_{i} \lambda_{e}}{4\pi e n \lambda_{\Sigma}} \frac{\partial^{2} E_{y}}{\partial z^{2}} = \frac{j_{y}}{\sigma} - \frac{1}{c} (H_{x} + H_{0}) v_{iz} + \frac{\lambda_{i} \lambda_{e}}{e n \lambda_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial z} (j_{y} v_{iz}) - \frac{\lambda_{i} \lambda_{e}}{\lambda_{\Sigma}} \beta n_{0} v_{0y}, \\ E_{z} = \frac{1}{c} (H_{x} + H_{0}) v_{iy} - \frac{\lambda_{i}}{e n \lambda_{\Sigma}} \frac{\partial P_{e}}{\partial z} - \frac{\lambda_{i}}{c e n \lambda_{\Sigma}} (H_{x} + H_{0}) j_{y} - \frac{\lambda_{i} \lambda_{e}}{\lambda_{\Sigma}} \beta n_{0} v_{0z}, \end{aligned}$$

$$(7)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial z} + v_{iz}\frac{\partial T_e}{\partial z} + (\gamma - 1)T_e\frac{\partial v_{iz}}{\partial z} = \frac{\gamma - 1}{k_E n}\frac{m_i}{m_\Sigma}\frac{\dot{j}_y^2}{\sigma} + (\gamma - 1)T_e\beta n_0, \quad P_e = k_E nT_e,$$

$$n = \int_{\mathbb{R}^2} f_i dv_y dv_z, \quad n_0 = \int_{\mathbb{R}^2} f_0 dv_y dv_z, \quad v_{iy,z} = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^2} v_{y,z} f_i dv_y dv_z, \quad v_{0y,z} = \frac{1}{n_0}\int_{\mathbb{R}^2} v_{y,z} f_0 dv_y dv_z.$$

При этом сделаны упрощающие предположения: $\boldsymbol{q}_e = 0$, $\Pi_e = 0$, $Q_e = 0$, $P_i = 0$, $\beta \equiv \beta_0 = \text{const} > 0$, в частности, из диссипативных эффектов учитывается только магнитная вязкость. Система (7) решается в области $0 \le z \le L$, $t \ge 0$, $v_y, v_z \in \mathbb{R}$ с начальными и граничными условиями, рассмотренными в §3. К системе (7) процессы в СПД не допущение, что радиальные приводит вносят существенный вклад в ускорение ионов вдоль оси z. В частности, можно пренебречь радиальным движением электронов, их рассеянием на боковых стенках установки и пристеночной проводимостью [15]. Если выпрямить коаксиальную камеру установки посредством экспоненциального отображения, то ось r перейдёт в ось x, ось φ – в ось y, и, значит, в системе (7) E_y – это азимутальное электрическое поле, j_y – плотность азимутального тока, H_x и *H*₀(*z*) – индукционное и внешнее радиальные магнитные поля. Заметим, что при $H_0(z) \neq$ const возникает фиктивный ток вдоль оси *y*, плотность которого равна $-c(4\pi)^{-1}dH_0/dz$.

Практически важный класс решений системы (1) получим, считая $f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = n_a(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a)$, где $\mathbf{v}_a \in \mathbb{R}^3$ – заданный вектор. Учитывая равенства $(v^i - v_a^i) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) = 0$, $1 \le i \le 3$, уравнение кинетики для нейтралов равносильно уравнению для концентрации нейтралов n_a :

$$\partial n_a / \partial t + \mathbf{v}_a \cdot \nabla n_a = -\beta n n_a, \tag{8}$$

а уравнение кинетики для ионов примет вид:

$$\partial f_i / \partial t + \langle \boldsymbol{v}, \nabla_{\boldsymbol{x}} f_i \rangle + \langle \boldsymbol{F}, \nabla_{\boldsymbol{v}} f_i \rangle = \beta n n_a \delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_a).$$
(9)

Для указанного класса решений система (1) упрощается, поскольку уравнение кинетики для нейтралов редуцируется к значительно более простому уравнению переноса (8). К уравнениям (8), (9) можно прийти и без использования обобщённых функций, если проинтегрировать уравнение кинетики для нейтралов по характеристикам x(t) = vt + const. Тогда получим общее решение уравнения кинетики для нейтралов:

$$f_0(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = f_*(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \exp\left[-\int_0^t \beta n(\tau, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}(\tau - t))d\tau\right],$$
(10)

где $f_*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = f_0|_{t=0}$ – произвольная функция. Пусть $f_* = f_{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = n_*(\boldsymbol{x})\delta_{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_a)$, $\varepsilon > 0$, где $\delta_{\varepsilon}(\boldsymbol{v})$ при $\varepsilon \to 0$ в пространстве обобщённых функций сходится к δ функции $\delta(\boldsymbol{v})$. Например, можно положить $\delta_{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_a) = (\pi \varepsilon)^{-3/2} \exp[-(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_a)^2 / \varepsilon]$. Тогда, если $f_{0\varepsilon}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ вычисляется посредством (10) по начальной функции $f_{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$, то, как нетрудно проверить, $f_{0\varepsilon}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = n(t, \boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) \delta_{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_a)$, где $n(t, \boldsymbol{x}; \boldsymbol{v})$ – решение задачи Коши

$$\partial n / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla n = -\beta n_i n, \quad n \mid_{t=0} = n_*.$$

Несложно показать, что в пространстве обобщённых функций $\lim_{\varepsilon \to 0} f_{0\varepsilon}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = n_a(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a)$, где $n_a(t, \mathbf{x})$ – решение уравнения (8) с начальным условием $n_a|_{t=0} = n_*$. Значит, в правой части уравнения (9) можно заменить обобщённую функцию $n_a \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a)$ на обычную функцию $n(t, \mathbf{x}; \mathbf{v}) \delta_{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a)$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим класс решений (8), (9) в случае плоской симметрии применительно к системе (7). Считаем $v_a = (0,0,v_a), v_a > 0,$ $f_0 = f_0(t,z,v_y,v_z) = n_a(t,z)\delta(v_y)\delta(v_z - v_a).$ Тогда $v_0 = v_a, n_0 = n_a$ и соотношения (7) дают систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_i}{\partial z} + \frac{e}{m_i} \left[E_y + \frac{(H_x + H_0)v_z}{c} - \frac{j_y}{\sigma} \right] \frac{\partial f_i}{\partial v_y} + \frac{e}{m_i} \left[E_z - \frac{(H_x + H_0)v_y}{c} \right] \frac{\partial f_i}{\partial v_z} = \\ &= \beta n n_a \delta(v_y) \delta(v_z - v_a), \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} + v_a \frac{\partial n_a}{\partial z} = -\beta n n_a, \quad \beta \equiv \beta_0 > 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad j_y = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \\ E_y - \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{\lambda_{\Sigma} 4 \pi e n} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{j_y}{\sigma} - \frac{1}{c} (H_x + H_0) v_{0z} + \frac{\lambda_i \lambda_e}{e n \lambda_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial z} (j_y v_{iz}), \sigma = \sigma_0 T_e^{3/2}, \\ E_z = \frac{1}{c} (H_x + H_0) v_{iy} - \frac{\lambda_i}{e n \lambda_{\Sigma}} \frac{\partial (k_E n T_e)}{\partial z} - \frac{\lambda_i}{c e n \lambda_{\Sigma}} (H_x + H_0) j_y - \frac{\lambda_i \lambda_e}{\lambda_{\Sigma}} \beta n_a v_a, \\ \frac{\partial T_e}{\partial z} + v_{iz} \frac{\partial T_e}{\partial z} + (\gamma - 1) T_e \frac{\partial v_{iz}}{\partial z} = \frac{\gamma - 1}{k_E n} \frac{m_i}{m_{\Sigma}} \frac{j_y^2}{\sigma} + (\gamma - 1) T_e \beta n_a, \\ n = \int_{\mathbb{R}^2} f_i dv_y dv_z, v_{iy} = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^2} v_y f_i dv_y dv_z, v_{iz} = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^2} v_z f_i dv_y dv_z. \end{aligned}$$

Система (11) позволяет исследовать процесс ускорения ионов и ионизацию нейтрального газа (Хе), поступающего через левую границу области [0, L] с

постоянной скоростью $v_a > 0$ с учётом индукционного электромагнитного поля. Ниже рассматриваются численные решения системы (11) и упрощённой системы, которая получится, если в (11) пренебречь индукционным магнитным полем и рассмотреть процессы ионизации и ускорения BO внешнем электромагнитном поле (см. §3). Коэффициент ионизации β считается $\beta_0 = 10^{-8} \text{ cm}^3 / \text{ c}, \qquad \sigma_0 = 10^7 \cdot 0.906, \qquad \gamma = 5 / 3,$ постоянным равным И $k_{\rm b} = 1.38 \cdot 10^{-16}$ эрг / К – постоянная Больцмана, атомный вес Xe равен 54, $m_i = m_{\chi_e} = 54m_p = 54 \cdot 1.67 \cdot 10^{-24} \Gamma = 0.9018 \cdot 10^{-22} \Gamma, \qquad m_{\Sigma} = m_i + m_e,$ поэтому $\lambda_{\Sigma} = \lambda_i + \lambda_e, \ \lambda_i = m_i / e, \ \lambda_e = m_e / e, \ e = 4.803 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ, $m_e = 9.1086 \cdot 10^{-28}$ г. Начальные и граничные условия рассмотрены в §3. Наконец, температура в (11) меряется в К.

Обезразмерим систему (11). Обозначим характерный масштаб величины квадратными скобками и будем считать выполненными следующие соотношения между характерными масштабами:

$$[E] = \frac{[H][v]}{c}, \quad [t] = \frac{[L]}{[v]}, \quad [j] = \frac{c}{4\pi} \frac{[H]}{[L]}, \quad [f] = \frac{[n]}{[v]^2}, \quad [\rho] = m_i[n],$$

где [L] – характерная длина, [v]– скорость, [E] – напряжённость электрического поля и т.д. Тогда безразмерные значения всех величин удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_i}{\partial z} + \varepsilon \Big[E_y + (H_x + H_0) v_z - v_m j_y \Big] \frac{\partial f_i}{\partial v_y} + \varepsilon \Big[E_z - (H_x + H_0) v_y \Big] \frac{\partial f_i}{\partial v_z} = \\ &= k_I n a_a \delta(v_y) \delta(v_z - v_a), \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} + v_a \frac{\partial n_a}{\partial z} = -k_I n n_a, \end{aligned}$$
(12)
$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad j_y = \frac{\partial H_x}{\partial z}, \\ E_y - \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi^2}{n} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = v_m j_y - (H_x + H_0) v_{iz} + \frac{\xi^2}{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\partial (j_y v_{iz})}{\partial z}, \\ E_z = (H_x + H_0) v_{iy} - \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}} \frac{\kappa \xi}{n} (H_x + H_0) j_y - \kappa \zeta \xi \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}} \frac{1}{n} \frac{\partial (nT_e)}{\partial z} - \frac{\lambda_e}{\lambda_{\Sigma}} \frac{k_I}{\varepsilon} n_a v_a, \\ \frac{\partial T_e}{\partial z} + v_{iz} \frac{\partial T_e}{\partial z} + (\gamma - 1) T_e \frac{\partial v_{iz}}{\partial z} = (\gamma - 1) \frac{m_i}{m_{\Sigma}} \frac{v_m}{\zeta} \frac{j_y^2}{n} + (\gamma - 1) k_I T_e n_a, \\ n = \int_{\mathbb{R}^2} f_i dv_y dv_z, v_{iy} = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^2} v_y f_i dv_y dv_z, v_{iz} = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^2} v_z f_i dv_y dv_z, \end{aligned}$$

где
$$\varepsilon = [t]\omega_{ci}, \quad \omega_{ci} = \frac{e[H]}{cm_i}, \quad v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma[L][v]} = \frac{v_{m0}}{T_e^{3/2}}, \quad v_{m0} = \frac{c^2}{4\pi\sigma_0[T]^{3/2}[L][v]},$$

 $k_I = \beta_0[n][t], \quad \xi = \frac{c(\lambda_i\lambda_e)^{1/2}}{[L](4\pi[\rho])^{1/2}}, \quad \kappa = \frac{v_A}{[v]}, \quad \zeta = \frac{k_B[T]}{m_iv_A^2}, \quad v_A = \frac{[H]}{(4\pi[\rho])^{1/2}}.$

Здесь ω_{ci} – циклотронная частота ионов, v_m – безразмерная магнитная вязкость с учётом спитцеровской проводимости плазмы, k_I – безразмерный коэффициент ионизации, v_A – характерная альфвеновская скорость, $\zeta = \beta_{pe}/2$, где $\beta_{pe} = 8\pi [P_e]/[H]^2$ – плазменная бета с учётом равенства $[P_e] = k_E[n][T]$. Система (12) имеет шесть чисел подобия ξ , ζ , v_m , κ , ε , k_I , что указывает на сложность процессов, описываемых этой системой. Аналогично обезразмеривается и система (1), только в этом случае $[f] = [n]/[v]^3$. Например, обобщённый закон Ома в безразмерной форме примет вид:

$$\boldsymbol{E} + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi^2}{n} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}} \frac{\xi \kappa}{n} [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}} \frac{\xi \kappa}{n} [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}} \frac{\xi \kappa}{n} [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}} \frac{\xi \kappa}{n} [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}} \frac{\xi \kappa}{n} [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}} \frac{\xi \kappa}{n} [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}} \frac{\xi \kappa}{n} [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}} \frac{\xi \kappa}{n} [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi \kappa}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi \kappa}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi \kappa}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{h}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi \kappa}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{h}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi \kappa}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{h}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi \kappa}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{h}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi \kappa}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{h}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi \kappa}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{h}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi \kappa}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{h}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi \kappa}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{h}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi \kappa}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{h}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi \kappa}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{h}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi \kappa}{n} \cdot \mathbf{D} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}$$

где появилось ещё одно число подобия $R = [\rho][v][L] / \mu_e$ – число Рейнольдса электронов, $\mu_e = \mu_{e_0} T_e^{5/2}$, $\mu_{e_0} = \mu_0 [T]^{5/2}$,

$$P_i^{k\ell} = \int_{\mathbb{R}^3} v^k v^\ell f_i dv - nv_i^k v_i^\ell, \quad 1 \le k, \ell \le 3, \quad \Pi_e = 2 \operatorname{def} v_e - \frac{2}{3} \operatorname{div} v_e \operatorname{I}_3.$$

масштабов Рассмотрим подобия для характерных числа $[L] = 1 \,\mathrm{cm},$ $[v] = 10^4 \text{ cm} / \text{c}$ (средняя скорость Xe в СПД атомов [4]), [T] = 12.1 эв (температура ионизации Xe), $\beta_0 = 10^{-8}$ см³ / с и данных из табл. 1 $[H] = 200 \,\mathrm{rc}, \quad [n] = 5 \cdot 10^{11} \mathrm{сm}^{-3}.$ Тогда вычисления $[t] = 10^{-4} c$, дают $\omega_{ci} = 3.55 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}, \ \varepsilon = 3.55, \ v_A = 8.4 \cdot 10^6 \text{ см} / \text{ с}, \ \kappa = 8.4 \cdot 10^2, \text{ в градусах Кельвина}$ $[T] = 14.036 \cdot 10^4 \text{ K}$, откуда $\zeta = 0.304 \cdot 10^{-2}$. Наконец, $\xi = 0.75$, $k_I = 0.5$, $v_{m0} = 15$. Полученные числа подобия имеют примерный, ориентировочный характер и могут варьироваться. Например, в качестве $[v] = 10^4$ см / с была взята средняя скорость атомов Хе, но по длине камеры СПД скорость атомов Хе может существенно меняться. Например, на входе в камеру, где расход Хе в единицу времени на каждый квадратный сантиметр равен, согласно табл. 1, 0.8 мг/с, имеем баланс массы

$$0.8 \frac{\mathrm{M}\Gamma}{\mathrm{c} \cdot \mathrm{cM}^2} = v_a n_a m_i,$$

что для данных из табл. 1 $n_a = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ даёт $v_a = 0.4385 \cdot 10^6 \text{ см} / \text{ с}$, т.е. значение в несколько десятков раз больше [v].

§2. Метод макрочастиц

Численное исследование системы (12) упирается в дискретизацию уравнения кинетики для ионов, которое чаще всего приближённо решается методом макрочастиц [16–19]. Обычно метод макрочастиц рассматривается как способ физического моделирования плазменных процессов, при котором ансамбль, состоящий из огромного количества реальных частиц (электронов, ионов, нейтралов и т.п.), заменяется на коллектив значительно меньшего количества макрочастиц, пригодный для практических вычислений. По сути, из первых принципов строится математическая модель, в которой кинетические интегро-дифференциальные уравнения не играют особой роли. Правомочность и эффективность указанной замены требуют специального анализа [16]. Альтернативный математический подход состоит в дискретизации уравнения кинетики, при котором функция распределения в каждый момент времени аппроксимируется конечномерными агрегатами, чья эволюция определяется уравнением кинетики и является объектом численного анализа. При этом в каждый момент времени t функция распределения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ определяет в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6 = \{(x, v)\}$ конечную регулярную борелевскую меру $\mu(t)$ [20], заданную на σ -алгебре S всех борелевских подмножеств \mathbb{R}^6 :

$$\mu(t)(E) = \int_{\text{def}} f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v}, \quad E \in S,$$

а уравнение кинетики переписывается в виде эволюционного уравнения, называемого обычно *обобщённым*, относительно меры $\mu(t)$. Решением обобщённого уравнения кинетики на временном отрезке [0,*T*] является непрерывная кривая $t \in [0,T] \rightarrow \mu(t)$. Вывод обобщённого уравнения кинетики опирается на отождествление конечных регулярных борелевских мер μ с положительными линейными непрерывными функционалами Λ на линейном пространстве непрерывных финитных (\equiv с компактным носителем) функций, заданных на \mathbb{R}^6 , снабжённых нормой максимум модуля. Положительность функционала Λ означает, что $\Lambda(f) \ge 0$ для любой $f \ge 0$. Биекция $\mu \leftrightarrow \Lambda$ задаётся простыми формулами:

$$\Lambda(f) = \Lambda_{\mu}(f) = \int_{\mathrm{def}} \int_{\mathbb{R}^6} f d\mu, \quad \mu(E) = \mu_{\Lambda}(E) = \inf_{\mathrm{def}} \operatorname{supinf}_{C \subseteq U} \{\Lambda(f) \mid \chi_C \leq f\}, E \in S,$$

где f – произвольная непрерывная финитная функция на \mathbb{R}^6 , χ_c – характеристическая функция C, первый inf берётся по всевозможным открытым подмножествам $U \supseteq E$, a sup – по всевозможным компактным подмножествам $C \subset U$. Сходимость регулярных борелевских мер и значит их близость друг другу и понятие аппроксимации понимаются в слабом смысле: $\mu_n \to \mu$ при $n \to +\infty$, если для любой непрерывной финитной функции f $\lim_{n \to +\infty} \Lambda_{\mu_n}(f) = \Lambda_{\mu}(f).$ В этом равенстве справедливо предельное равенство финитную функцию можно заменить на непрерывную непрерывную ограниченную функцию на \mathbb{R}^6 . Численный метод, с математической точки зрения, заключается в аппроксимации в указанном выше смысле для каждого *t* меры $\mu(t)$ "простыми" мерами $\mu_N(t)$, где N – параметр дискретизации. Уравнения для $\mu_N(t)$ получаются дискретизацией обобщённых уравнений кинетики для , $\mu(t)$ и теорема сходимости, если всё сделано правильно, состоит в следующем: если $\mu_N(0) \rightarrow \mu(0)$ при $N \rightarrow +\infty$, то для каждого $t \in [0,T]$ имеет $N \rightarrow +\infty$. $\mu_N(t) \to \mu(t)$ место сходимость при Конструкция аппроксимирующих агрегатов $\mu_N(t)$ определяет численный метод решения кинетических уравнений. Для метода макрочастиц она изложена ниже. Реализация указанной программы с некоторыми оговорками для уравнений Власова-Максвелла и Власова-Пуассона приведена в [21]. Практическое построение аппроксимирующих мер $\mu_N(t)$ и уравнений для них, как всегда, вычислительной "алхимией", сопровождается состоящей ИЗ ряда неформальных приёмов, позволяющих избежать паразитических эффектов при проведении численных расчётов и делающих конструкцию численного алгоритма пригодной для решения физических задач.

Рассмотрим для простоты случай, когда ионизация отсутствует ($\beta = 0$). Пусть плазма заполняет ограниченную область $D \subseteq \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей. Рассмотрим точки ($\mathbf{r}_j(t), \mathbf{v}_j(t)$) $\in D \times \mathbb{R}^3$, $t \ge 0$, $1 \le j \le N$, называемые макрочастицами, эволюция которых подчиняется уравнению характеристик:

$$d\mathbf{r}_{j} / dt = \mathbf{v}_{j}, \quad d\mathbf{v}_{j} / dt = \varepsilon(\mathbf{E}(t, \mathbf{r}_{j}) + [\mathbf{v}_{j}, \mathbf{H}(t, \mathbf{r}_{j})] - v_{m}\mathbf{j}(t, \mathbf{r}_{j})).$$
(13)

Система (13) решается в области $D \times \mathbb{R}^3$ с определёнными начальными условиями, о которых будет сказано позже.

Функция распределения f аппроксимируется "простой" функцией распределения $f_{N,\varepsilon} = f_{\varepsilon}$ по расположению макрочастиц в каждый момент времени следующим образом:

$$f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) \cong_{\text{def}} f_{\varepsilon}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = \sum_{j} q_{j} \delta_{\varepsilon}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{j}(t)) \Delta_{\varepsilon}((\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{j}(t)), \quad \varepsilon > 0, t \ge 0,$$
(14)

где числа $q_j > 0$, $1 \le j \le N$ заданы и называются *массами макрочастиц* и предполагается:

(A) $\delta_{\varepsilon} \ge 0$, $\Delta_{\varepsilon} \ge 0$. (B) $\int_{\mathbb{R}^3} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1 = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta_{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$.

(В) δ_{ε} , Δ_{ε} при $\varepsilon \to 0$ сходятся к δ -функции в нуле, что означает справедливость предельного равенства:

$$U(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} U(\mathbf{r}) \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

для любой непрерывной ограниченной функции $U(\mathbf{r})$, и аналогичное соотношение верно для $\Delta_{\varepsilon}(\mathbf{v})$, кроме того, считается, $0 \in \operatorname{supp} \delta_{\varepsilon}$ – компактен и limdiamsupp $\delta_{\varepsilon} = 0$, а $\Delta_{\varepsilon}(\mathbf{v})$ – чётная функция.

Средние величины n и v вычисляются по f_{ε} очевидным образом

$$n(t,\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^{3}} f_{\varepsilon} d\mathbf{v} = \sum_{j} q_{j} \delta_{\varepsilon} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)), \quad \mathbf{r} \in D, t \ge 0,$$

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^{3}} \mathbf{v} f_{\varepsilon} d\mathbf{v} = \sum_{j} q_{j} \mathbf{v}_{j}(t) \delta_{\varepsilon} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) \left[\sum_{j} q_{j} \delta_{\varepsilon} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) \right]^{-1}, \quad \mathbf{r} \in D, t \ge 0,$$
(15)

где использовано (Б) и чётность функции $\Delta_{\varepsilon}(v)$.

В системе (13) E, H, j получаются из решения уравнений электродинамики в области $D \subseteq \mathbb{R}^3$ с учётом уравнения энергии для электронной температуры T_e , которая входит в v_m и тензор W:

$$\partial \boldsymbol{H} / \partial t + \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \quad \boldsymbol{j} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H},$$

$$\boldsymbol{E} + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi^2}{n} \operatorname{rotrot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_m \boldsymbol{j} - [\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}} \frac{\xi \kappa}{n} [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\xi}{n} \operatorname{Div} \boldsymbol{W}, \quad (16)$$

$$\partial T_e / \partial t + \boldsymbol{v}_e \nabla T_e + (\gamma - 1) T_e \operatorname{div} \boldsymbol{v}_e = (\gamma - 1) \frac{m_i}{m_{\Sigma}} \frac{\boldsymbol{v}_m}{\zeta} \boldsymbol{j}^2.$$

В системе (16) величины *n* и $v_i = v$ вычисляются по формулам (15). Система (16) решается с определёнными начальными и граничными условиями (см. ниже). Если бы имелась явная формула для решения системы (16) с определёнными начальными и граничными условиями, то этой формулой и соотношениями (13)–(15) метод макрочастиц и исчерпывался бы. Поскольку явные формулы решения системы (16) отсутствуют, её приходится решать численно, используя дискретизацию уравнений системы (16) и входящих в неё функций H, E, T_e . Допустим для определённости, что система (16)

приближённо решается посредством некоторой разностной схемы, а неизвестные функции H, E, T_e при этом аппроксимируются сеточными функциями, заданными в узлах $\{r^k\}_{1 \le k \le M}$ некоторой пространственной сетки в области D. Если вычислять значения $n(t, r^k)$, $v(t, r^k)$ по формуле (15), то, оказывается, масса и импульс в области D со временем не сохраняются, и для их сохранения необходима коррекция формул осреднения (15). С другой стороны, для решения системы (13) необходимо по сеточным функциям $H(t, r^k)$, $E(t, r^k)$, $T_e(t, r^k)$ восстановить H, E, T_e во всей области D или хотя бы в точках-местоположениях макрочастиц $r_j(t)$ с помощью некоторой интерполяции.

Рассмотрим оба аспекта. Начнём с коррекции формул (15), которая на вычислительном жаргоне называется "размазыванием" макрочастиц по узлам пространственной сетки. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^3$ – компактная область с кусочно-гладкой границей, где в каждый момент времени t лежат все макрочастицы: $r_i(t) \in D$, $1 \le j \le N$, $t \ge 0$.

Определение 1. Оснащённой сеткой в области D называется пара $\{r^k\}_{1 \le k \le M}$ точек из D и $\{D_k\}_{1 \le k \le M}$, D_k – компактная область с кусочно-гладкой границей, для которых выполнены условия: (a) $D_k \cap D_{k'} = \partial D_k \cap \partial D_{k'}$ при $k \ne k'$;

(6)
$$\boldsymbol{r}^{k} \in \operatorname{Int}D_{k}, \ 1 \le k \le M, \ a \ D \in \bigcup_{k=1}^{M}D_{k};$$

(в) найдётся $\varepsilon_0 > 0$: для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и любого $1 \le j \le N$ в каждый момент времени верно включение $\operatorname{supp} \delta_{\varepsilon}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j(t)) \subseteq \bigcup_{k=1}^M D_k$.

Положим

$$n(t, \mathbf{r}^{k}) = \sum_{def} \frac{q_{j}}{|D_{k} \cap D|} \int_{D_{k}} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r}, \quad 1 \le k \le M,$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}^{k}) = (n(t, \mathbf{r}^{k}))^{-1} \sum_{j} \frac{q_{j} \mathbf{v}_{j}(t)}{|D_{k} \cap D|} \int_{D_{k}} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r}, \quad 1 \le k \le M,$$
(17)

где |A| для измеримого подмножества $A \subseteq \mathbb{R}^3$ обозначает меру Лебега A. Формулы (17) непротиворечивы. Из (б) следует $|D_k \cap D| > 0$, $1 \le k \le M$, а из (в) для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ вытекает неравенство $n(t, \mathbf{r}_k) > 0$, $1 \le k \le M$, $t \ge 0$. Это следствие равенства

$$\sum_{k=1}^{M} \int_{D_{k}} \delta_{\varepsilon}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{j}(t)) d\boldsymbol{r} = 1, \quad 1 \le j \le N, t \ge 0, \varepsilon < \varepsilon_{0}.$$
(18)

Действительно, имеем:

$$1 \underset{(\mathbf{b})}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) d\mathbf{r} \underset{(\mathbf{b})}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) d\mathbf{r} \underset{(\mathbf{a})}{=} \sum_{k=1}^M \int_{D_k} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) d\mathbf{r}.$$

Из (18) следуют законы сохранения массы и импульса на сетке:

$$\sum_{k} |D_{k} \cap D| n(t, \boldsymbol{r}^{k}) = \sum_{j} q_{j},$$

$$\sum_{k} |D_{k} \cap D| n(t, \boldsymbol{r}^{k}) \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r}^{k}) = \sum_{j} q_{j} \boldsymbol{v}_{j}(t).$$
(19)

При этом следует учесть соотношения $D = \bigcup_{k=1}^{M} (D_k \cap D), \ \mathbf{r}^k \in D_k \cap D, \ a \ D_k \cap D$ и

 $D_{k'} \cap D$ при $k \neq k'$ пересекаются по множеству нулевой лебеговской меры. Проверим, например, закон сохранения массы:

$$\sum_{k} |D_{k} \cap D| n(t, \mathbf{r}^{k}) = \sum_{k} \sum_{j} q_{j} \int_{D_{k}} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r} = \sum_{j} \sum_{k} q_{j} \int_{D_{k}} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r} =$$
$$= \sum_{j} q_{j} \sum_{k} \int_{D_{k}} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r} = \sum_{j} q_{j}.$$

Формулы (17), корректирующие значения для средних величин (15), используются в практических вычислениях. Они являются следствием общего принципа: для любой гладкой функции $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ с не более чем степенным ростом по \mathbf{v} при фиксированном \mathbf{r} и любой (вообще говоря, некомпактной) области $G \subseteq \mathbb{R}^6$ с кусочно-гладкой границей имеет место предельное равенство:

$$\int_{G} \varphi f d\mathbf{r} d\mathbf{v} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{G} \varphi f_{\varepsilon} d\mathbf{r} d\mathbf{v}$$
(20)

при каждом $t \ge 0$. Полагая $G = D_k \times \mathbb{R}^3$, $\varphi = 1$, $\varphi = v^i$, $1 \le i \le 3$ и учитывая $n|_{\mathbb{R}^3 \setminus D} \equiv 0$, $v|_{\mathbb{R}^3 \setminus D} \equiv 0$, приходим к (17). При этом предполагается (см. §1), что все функции распределения в скоростном пространстве убывают на бесконечности быстрее любой степени $\|v\|^{-k}$, k = 0, 1, 2, ...

Интерполяция функций, заданных в узлах оснащённой сетки, на макрочастицы основана на следующей цепочке точных и приближённых равенств:

$$U(\mathbf{r}_{j}(t)) \underset{(B)}{\cong} \int_{\mathbb{R}^{3}} U(\mathbf{r}) \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{M} \int_{D_{k}} U(\mathbf{r}) \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r} \cong$$
$$\cong \sum_{k=1}^{M} U(\mathbf{r}^{k}) \int_{D_{k}} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r},$$

где точность последнего равенства оценивается величиной

ī

$$\sup_{\mathbb{R}^3} \|\nabla U\| \cdot \max_k \operatorname{diam} D_k.$$

Здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма в \mathbb{R}^3 . Действительно, используя теорему о среднем и неравенство Коши-Шварца, имеем оценки:

$$\left|\sum_{k} \int_{D_{k}} U(\mathbf{r}) \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r} - \sum_{k} U(\mathbf{r}^{k}) \int_{D_{k}} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r}\right| \leq \\ \leq \sum_{k} \int_{D_{k}} \left| U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}^{k}) \right| \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r} \leq \sum_{k} \int_{D_{k}} \left\| \nabla U(r_{cp}) \right\| \cdot \left\| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{k} \right\| \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r} \leq \\ \leq \sup_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3}} \left\| \nabla U(\mathbf{r}) \right\| \cdot \max_{k} \operatorname{diam} D_{k} \cdot \sum_{k} \int_{D_{k}} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r} = \sup_{(18)} \left\| \nabla U \right\| \cdot \max_{k} \operatorname{diam} D_{k},$$

где $r_{cp} = \theta r + (1 - \theta) r^k$, $0 < \theta < 1$. Итак, основная интерполяционная формула имеет вид:

$$U(\mathbf{r}_{j}(t)) \cong \sum_{k} U(\mathbf{r}^{k}) \int_{D_{k}} \delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r}.$$
(21)

Точность формулы (21) для U(r) с ограниченными в \mathbb{R}^3 частными производными первого порядка возрастает при $\varepsilon \to 0$ и max diam $D_k \to 0$. Различие между формулами (17) и (21) существенное. Интерполяция (21) не зависит от области D, где расположена сплошная среда, а формулы "размазывания" макрочастиц по узлам пространственной сетки (17), гарантирующие соблюдение законов сохранения массы и импульса в области D, существенно зависят от этой области вблизи её границы. Формулы (13), (14), (17), (21), дополненные разностной схемой решения системы (16) относительно сеточных функций, заданных в узлах оснащённой сетки $\{r^k\}$, составляют содержание метода макрочастиц без учёта ионизации.

Перепишем формулы (17) и (21) в компактном виде

$$n(t,\boldsymbol{r}^{k}) = \sum_{j} q_{j} p_{j}^{D}(k), \quad \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{r}^{k}) = (n(t,\boldsymbol{r}^{k}))^{-1} \sum_{j} q_{j} \boldsymbol{v}_{j} p_{j}^{D}(k),$$

$$p_j(k) = \int_{D_k} \delta_{\varepsilon}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j(t)) d\boldsymbol{r}, \quad p_j^D(k) = p_j(k) / |D_k \cap D|, \quad 1 \le k \le M, 1 \le j \le N, \quad (22)$$

$$U(\mathbf{r}_{j}(t)) = \sum_{k} U(\mathbf{r}^{k}) p_{j}(k).$$

Конкретизируем эти построения применительно к 1D2V-задаче, составляющей содержание, в частности, системы (12). Для 1D-задачи область D – одномерная. В простейшем случае D = [0,L], $x^k = kh$, $0 \le k \le M$, h = L/M, $D_k = [x^k - h/2, x^k + h/2]$, $0 \le k \le M$. Тогда $\{x^k\}_{0 \le k \le M}$, $\{D_k\}_{0 \le k \le M}$ – оснащённая сетка узлов в D в смысле **Определения 1**, $|D_k| = h$, $|D_k \cap D| = h$ при $k \ne 0, M$ и $|D_k \cap D| = h/2$, если k = 0, M. Положим $x^{k+1/2} = x^k + h/2 = (k + 1/2)h$.

Пример 1 (NGP-метод). Пусть $0 < \varepsilon_0 << h$. Значения $p_j(k)$ вычисляются так. Если существует определённое однозначно $0 \le k_0 \le M$, для которого $|x_j - x^{k_0+1/2}| \le \varepsilon_0$, то положим, по соглашению, либо $p_j(k_0) = 1$, $p_j(k_0+1) = 0$, либо $p_j(k_0) = 0$, $p_j(k_0+1) = 1$ и $p_j(k) = 0$ для $k \ne k_0, k_0 + 1$. Если указанного k_0 нет, то найдётся единственное $0 \le \ell \le M$: $|x_j - x^\ell| = \min_{0 \le k \le M} |x_j - x^k|$ (узел x^ℓ является ближайшим к макрочастице x_j узлом оснащённой сетки, поэтому рассматриваемый способ построения $p_j(k)$ называется Nearest Grid Point model). Положим $p_j(\ell) = 1$, $p_j(k) = 0$, $k \ne \ell$ и, наконец, определим

$$p_{j}^{D}(k) = \begin{cases} p_{j}(k) / h, & k \neq 0, M, \\ 2p_{j}(k) / h, & k = 0, M. \end{cases}$$

Получаемые в итоге формулы (22) применимы для любой $\delta_{\varepsilon}(x)$ с достаточно малым ε , diamsup $\delta_{\varepsilon} \leq \varepsilon_0$ и не зависят от $\delta_{\varepsilon}(x)$, в чём, вероятно, их преимущество.

Пример 2. Пусть для $\varepsilon > 0$:

$$\delta_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon), & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Последовательность $\delta_{\varepsilon}(x)$ слабо сходится к δ -функции в нуле, supp $\delta_{\varepsilon}(x) = [-\varepsilon, \varepsilon]$, diam sup $\delta_{\varepsilon}(x) = 2\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Рассмотрим случай $\varepsilon \le h/2$. Прямые вычисления по формулам (22) приводят к следующему результату. Пусть $0 \le k_0 < M$: $x_i \in [x^{k_0}, x^{k_0+1}]$, $y = x^{k_0+1/2} - x_i$. Тогда где $S_1 = 1/2 + y/(2\varepsilon)$, $S_2 = 1/2 - y/(2\varepsilon)$. Очевидно, $S_1 + S_2 = 1$, $p_j(k) \ge 0$, $p_j(k_0) + p_j(k_0 + 1) = 1$. Наконец,

$$p_{j}^{D}(k) = \begin{cases} p_{j}(k) / h, & k \neq 0, M, \\ 2p_{j}(k) / h, & k = 0, M. \end{cases}$$

Пример 3. Пусть для *ε* > 0:

$$\delta_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon - |x|}{\varepsilon^2}, & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Последовательность $\delta_{\varepsilon}(x)$ слабо сходится к δ -функции в нуле при $\varepsilon \to 0$, supp $\delta_{\varepsilon}(x) = [-\varepsilon, \varepsilon]$, diam sup $\delta_{\varepsilon}(x) = 2\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Рассмотрим случай $\varepsilon \le h/2$. Прямые вычисления по формулам (22) приводят к следующему результату. Пусть $0 \le k_0 < M$: $x_i \in [x^{k_0}, x^{k_0+1}]$, $y = x^{k_0+1/2} - x_i$. Тогда

$$p_j(k_0) = 1 - \alpha(y), \quad p_j(k_0 + 1) = \alpha(y), \quad p_j(k) = 0, k \neq k_0, k_0 + 1,$$

где



Рис. 2. Профиль $\alpha(y)$.

Наконец,

$$p_{j}^{D}(k) = \begin{cases} p_{j}(k) / h, & k \neq 0, M, \\ 2p_{j}(k) / h, & k = 0, M. \end{cases}$$

Пример 4. Пусть

$$\delta_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{\varepsilon} \right), & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда $\delta_{\varepsilon}(x)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ к δ -функции в нуле, $\operatorname{supp} \delta_{\varepsilon}(x) = [-\varepsilon, \varepsilon]$, diam $\operatorname{sup} \delta_{\varepsilon}(x) = 2\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. В случае $\varepsilon \le h/2$ прямое вычисление по формулам (22) даёт следующий результат. Пусть $0 \le k_0 < M$: $x_j \in [x^{k_0}, x^{k_0+1}]$, $y = x^{k_0+1/2} - x_j$. Тогда

$$p_j(k_0) = 1 - \alpha(y), \quad p_j(k_0 + 1) = \alpha(y), \quad p_j(k) = 0, k \neq k_0, k_0 + 1,$$

где $\alpha(y) = \frac{1}{2} - \frac{y}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi y}{\varepsilon}, \quad |y| \le \varepsilon, \quad \alpha(y) = 1, \quad y \le -\varepsilon, \quad \alpha(y) = 0, \quad y \ge \varepsilon.$

Качественное поведение графика $\alpha(y)$ такое же, как на рисунке из **Примера 3**. Наконец,

$$p_{j}^{D}(k) = \begin{cases} p_{j}(k) / h, & k \neq 0, M, \\ 2p_{j}(k) / h, & k = 0, M. \end{cases}$$

Функции $\delta_{\varepsilon}(x)$ из Примеров 1÷4 часто используются в вычислительной практике метода макрочатиц [17]. Ограничение $\varepsilon \le h/2$ принципиальное. Если $\varepsilon > h/2$, то масса и импульс в области D сохраняться не будут и для исправления этого дефекта придётся дополнительно вводить заграничные узлы x^k и заграничные области D_k . Заметим, учитывая сказанное, что иногда используемые функции $\delta_{\varepsilon}(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/(2\varepsilon^2))/\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ непригодны для численной реализации метода макрочастиц, поскольку они не удовлетворяют ограничениям (В) и (в) выше. Приведённые формулы упрощаются при $\varepsilon = h/2$. Тогда в **Примере 2** $S_1 = (x^{k_0+1} - x_j) / h$, $S_3 = (x_j - x^{k_0}) / h$ – барицентрические координаты точки x_j на отрезке $[x^{k_0}, x^{k_0+1}]$: $x_j = S_1 x^{k_0} + S_2 x^{k_0+1}$, $S_1 + S_2 = 1$. В Примере 3 $\alpha(y) = 2S_2^2$ при $y \ge 0$ и $\alpha(y) = 1 - 2S_1^2$ при $y \le 0$. В Примере 4 $\alpha(y) = S_2 - (2\pi)^{-1} \sin(2\pi S_2), \qquad 1 - \alpha(y) = S_1 - (2\pi)^{-1} \sin(2\pi S_1),$ где $y/h = 1/2 - S_2 = S_1 - 1/2$. Таким образом, как показывают Примеры 2–4, при $\varepsilon = h/2$ "размазывание" макрочастиц по узлам пространственной сетки и интерполяция функции, заданной в узлах, на макрочастицы целиком

определяется барицентрическими координатами S_1 , S_2 точки x_j на отрезке $[x^{k_0}, x^{k_0+1}]$, где она расположена.

Ответственным шагом, обеспечивающим спокойный старт вычислений по методу макрочастиц без паразитических флуктуаций, является выбор начального расположения макрочастиц. Рассмотрим общий принцип построения начального расположения. Пусть $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ – начальная функция распределения, $\mathbf{x} \in D$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ и фиксировано разложение $D \times \mathbb{R}^3 = G_1 \cup \ldots \cup G_N$, где $G_j \subseteq \mathbb{R}^6$, $1 \le j \le N$ – области с кусочно-гладкими границами (не обязательно компактные), причём $G_j \cap G_{j'} = \partial G_j \cap \partial G_{j'}$ при $j \ne j'$, в частности, это пересечение имеет нулевую меру по Лебегу. Пусть $\overline{\text{сопv}}G_j$ – замкнутая выпуклая оболочка G_j (т.е. пересечение всех замкнутых выпуклых подмножеств $D \times \mathbb{R}^3$, содержащих G_j , см. [22]) и $(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j) \in \overline{\text{сопv}}G_j$, $1 \le j \le n$ – фиксированные точки.

Теорема 1. Имеет место слабая сходимость

$$\sum_{j} q_{j} \delta_{\varepsilon}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_{j}) \Delta_{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{j}) \xrightarrow{\text{cnado}} f_{0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}), \quad q_{j} \stackrel{=}{\underset{G_{j}}{=}} \int_{G_{j}} f_{0} d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v}$$
(23)

при одновременном стремлении $N \to +\infty$, $\max_{1 \le j \le N} q_j \to 0$, $\varepsilon \to 0$, при этом $\sum_j q_j = \text{const}$ и считается, что f_0 убывает в скоростном пространстве быстрее, чем любая степень $\|\mathbf{v}\|^{-k}$, k = 0, 1, 2, ...#

Простейший способ выбора точек $(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j) \in \overline{\text{conv}}G_j$ состоит в вычислении центров масс областей G_j :

$$\boldsymbol{r}_{j} = \frac{1}{q_{j}} \int_{G_{j}} \boldsymbol{x} f_{0} d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v}_{j} = \frac{1}{q_{j}} \int_{G_{j}} \boldsymbol{v} f_{0} d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Тогда $(\mathbf{r}_{j}, \mathbf{v}_{j}) \in \overline{\text{сопv}}G_{j}$ и, учитывая **Теорему** 1, можно рассматривать $\{(\mathbf{r}_{j}, \mathbf{v}_{j})\}_{1 \le j \le N}$ как начальное расположение макрочастиц. Центры масс обладают важным характеристическим свойством, которое следует иметь в виду. Пусть $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ – непрерывно дифференцируемое поле на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{6}$, $F \stackrel{=}{=} (\mathbf{v}, F(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}))$ – *расширенное* поле, причём div_vF = 0, а поле F – полное (\equiv каждая продолжаемая интегральная кривая F определена на всей числовой оси), тогда возникает поток $\Phi_{s}^{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ поля F. Напомним, $\Phi_{s}^{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \gamma_{s, \mathbf{x}, \mathbf{v}}(t)$, где справа стоит непродолжаемая интегральная кривая поля F, принимающая в точке s

значение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$. Поток $\boldsymbol{\Phi}_s^t : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ обладает групповым свойством: $\boldsymbol{\Phi}_t^{\tau} \circ \boldsymbol{\Phi}_s^t = \boldsymbol{\Phi}_s^{\tau}$ для любых $s, t, \tau \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\Phi}_t^t = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^6}$ для любого $t \in \mathbb{R}$. В частности, $\boldsymbol{\Phi}_s^t -$ диффеоморфизм \mathbb{R}^6 .

Теорема 2. Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^6$ – область с кусочно-гладкой границей, f – решение кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left\langle \boldsymbol{v}, \nabla_{\boldsymbol{x}} f \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{F}, \nabla_{\boldsymbol{v}} f \right\rangle = 0, \tag{24}$$

#

 $G(t) = \Phi_0^t(G), (r(t), v(t)) -$ центры масс областей G(t):

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{1}{q(t)} \int_{G(t)} \boldsymbol{x} f d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v}(t) = \frac{1}{q(t)} \int_{G(t)} \boldsymbol{v} f d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v}, \quad q(t) = \int_{G(t)} f d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v}.$$

Тогда $q(t) \equiv \text{const}$, а r(t), v(t) приближённо удовлетворяют уравнению характеристик кинетического уравнения (24), точнее, имеют место тождества

$$d\mathbf{r}(t) / dt = \mathbf{v}(t), \quad d\mathbf{v}(t) / dt = F(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) + \boldsymbol{\varepsilon}(t),$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \frac{1}{q} \int_{G(t)} [F(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - F(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))] f d\mathbf{x} d\mathbf{v}.$$

Из **Теоремы 2** следует, что при $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll \|\boldsymbol{F}\|$ центры масс областей G(t)эволюционируют почти по характеристикам уравнения кинетики (24). Теорема 2 лежит в основании метода макрочастиц. Основная идея метода состоит в замене теоретически бесконечного (а фактически – астрономически большого) числа частиц в фазовом пространстве на конечное число частиц. Для этого фазовое пространство разбивается на конечное число областей, и частицы каждой области образуют одну "большую" макрочастицу. Эволюция макрочастиц определяется потоком поля **F**. Если G – одна из областей разбиения, а $G(t) = \Phi_0^t(G)$, то найти местоположение G(t) и изменение функции распределения в пределах G(t) ненамного проще, чем определить эволюцию функции распределения частиц, решив кинетическое уравнение (24). Ситуацию кардинально меняет **Теорема 2**. Вместо эволюции областей *G*(*t*) рассмотрим эволюцию их центров масс (r(t), v(t)), динамика которых, согласно Теореме 2, приближённо определяется уравнением характеристик для (24) и, значит, в принципе может быть определена. С другой стороны, любое множество фазового пространства расположено в некотором смысле вблизи своего центра масс, поэтому по расположению центров масс (r(t), v(t)) можно приближённо восстановить области G(t) и изменение функции распределения в пределах этих областей. Точность всех построений будет неограниченно увеличиваться при неограниченном увеличении количества областей разбиения фазового пространства при условии, что максимум по областям разбиения числа частиц в каждой области стремится к нулю.

Применим предыдущие конструкции к одномерной задаче (12) и одномерной области D = [0, L], рассмотренной выше, полагая, что начальная функция распределения является максвеллианом:

$$f_0(z, v_y, v_z) = \frac{n}{2\pi T / m} \exp\left[-\frac{v_y^2 + v_z^2}{2T / m}\right],$$
(25)

где n = n(z), T = T(z). В практически важном случае T = const – температура ионизации (в эргах), m – масса иона Хе, n = const. Пусть $G = [x^k, x^{k+1}] \times V_{r,R}$, $0 \le k < M$, $V_{r,R}$ – сектор в скоростном пространстве $\{(v_y, v_z)\}$, изображённый на рис. 3, где $0 \le r < R \le +\infty$.



Рис. 3. Разбиение скоростного пространства на секторы лучами

Элементарное интегрирование приводит к следующему результату.

Лемма 1. Координаты центра масс области G для функции распределения (25) и масса области G в случае T = const, n = const вычисляются по формулам

$$z_{G} = x^{k+1/2}, \quad y_{y,G} = \frac{1}{2} \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha} \sqrt{\frac{2T}{m}} \kappa_{r,R}, \quad y_{y,G} = \frac{1}{2} \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\beta - \alpha} \sqrt{\frac{2T}{m}} \kappa_{r,R},$$

$$q_{G} = \frac{n}{\pi} \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \left(e^{-r^{2}} - e^{-R^{2}}\right) h, \quad \kappa_{r,R} = \frac{re^{-r^{2}} - \operatorname{Re}^{-R^{2}} + (\sqrt{\pi}/2)[\operatorname{erf}(R) - \operatorname{erf}(r)]}{e^{-r^{2}} - e^{-R^{2}}},$$
(26)

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^{2}} dt$ – интеграл ошибок. Если $T = \operatorname{const}, a = n(z), mo$

формулы для $v_{y,G}$, $v_{z,G}$ останутся прежними, а формулы для z_G , q_G примут вид:

$$z_{G} = \int_{x^{k}}^{x^{k+1}} zn(z)dz \left[\int_{x^{k}}^{x^{k+1}} n(z)dz \right]^{-1}, \quad q_{G} = \int_{x^{k}}^{x^{k+1}} n(z)dz \cdot \frac{1}{\pi} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \left(e^{-r^{2}} - e^{-R^{2}} \right).$$

#

Нетрудно обобщить результат **Леммы 1** на случай T = T(z), но мы этого делать не будем.

Рассмотрим теперь разбиение скоростного пространства на секторы лучами, проведёнными из нуля под углами $(2\pi / N_1)s + \varphi_k$, $0 \le s < N_1$, $0 \le k < M$ к оси v_y и окружностям радиусов R_ℓ , $0 \le \ell \le N_2$, $R_0 = 0 < R_1 < \ldots < R_{N_2} = +\infty$, как показано на рис. 3. Таким образом, разбиение скоростного пространства зависит от отрезка $[x^k, x^{k+1}]$. Обозначим полученные секторы $U_{k,s,\ell}$, $0 \le k \le M - 1$, $0 \le s \le N - 1$, $0 \le \ell \le N_2 - 1$. В итоге имеем разбиение фазового пространства $D \times \mathbb{R}^2$ на $M \cdot N_1 \cdot N_2$ областей $G = G_{k,s,\ell} = [x^k, x^{k+1}] \times U_{k,s,\ell}$, центры масс и массы которых вычисляются по формулам (26), где надо положить $\alpha = (2\pi / N_1)s + \varphi_k$, $\beta = (2\pi / N_1)(s + 1) + \varphi_k$, $r = R_\ell$, $R = R_{\ell+1}$. Подберём R_1, \ldots, R_{N_2-1} так, чтобы массы всех областей $G_{k,s,\ell}$ совпали. Из (26) следует, что для этого необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$1 - e^{-R_1^2} = e^{-R_1^2} - e^{-R_2^2} = e^{-R_2^2} - e^{-R_3^2} = \dots = e^{-R_{N_2-1}^2}, \quad (e^{-R_0^2} = 1, e^{-R_{N_2}^2} = 0).$$

Обозначим $\alpha_{\ell} = \exp(-R_{\ell}^2)$, $0 \le \ell \le N_2$. Тогда для выполнения указанных соотношений необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_0, ..., \alpha_{N_2}$ было решением краевой разностной задачи:

$$\alpha_{\ell+1} - 2\alpha_{\ell} + \alpha_{\ell-1} = 0, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_{N_2} = 0, \quad 1 \le \ell \le N_2 - 1.$$
(27)

Общее решение однородного разностного уравнения (27) имеет вид $\alpha_{\ell} = C_1 \ell + C_2$, где константы C_1 и C_2 ищутся из граничных условий: $C_2 = 1$, $C_1 = -1/N_2$, откуда $\alpha_{\ell} = 1 - \ell/N_2$, $0 \le \ell \le N_2$, и, значит, $R_{\ell} = \left(\ln \frac{N_2}{N_2 - \ell} \right)^{1/2}$, $0 \le \ell \le N_2$. В итоге разбиение фазового пространства с одинаковыми массами

состоит из областей $G_{k,s,\ell}$, координаты центра масс которых и массы вычисляются по формулам:

$$z_{k,s,\ell} = x^{k+1/2}, \quad v_{y,k,s,\ell} = \frac{N_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{N_1} \sqrt{\frac{2T}{m}} w_\ell \cos \left(\frac{2\pi s}{N_1} - \frac{\pi}{N_1} + \varphi_k\right),$$

$$v_{z,k,s,\ell} = \frac{N_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{N_1} \sqrt{\frac{2T}{m}} w_\ell \sin \left(\frac{2\pi s}{N_1} - \frac{\pi}{N_1} + \varphi_k\right), \quad q_{k,s,\ell} = q = \frac{\pi h}{N_1 N_2},$$

$$w_\ell = \left\{ \left(1 - \frac{\ell}{N_2}\right) \left(\ln \frac{N_2}{N_2 - \ell}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{\ell + 1}{N_2}\right) \left(\ln \frac{N_2}{N_2 - \ell - 1}\right)^{1/2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\ln \frac{N_2}{N_2 - \ell - 1}\right)^{1/2} - \operatorname{erf} \left(\ln \frac{N_2}{N_2 - \ell}\right)^{1/2} \right] \right\} N_2,$$

$$0 \le k \le M - 1, \quad 0 \le s \le N_1 - 1, \quad 0 \le \ell \le N_2 - 1.$$

$$(28)$$

В практически наиболее важном случае $N_2 = 1$ имеем $\ell = 0$, $w_0 = \sqrt{\pi}/2$, и формулы (28) для скоростей упрощаются

$$v_{y,k,s} = \frac{N_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{N_1} \sqrt{\frac{\pi T}{2m}} \cos \left(\frac{2\pi s}{N_1} - \frac{\pi}{N_1} + \varphi_k \right),$$
$$v_{z,k,s} = \frac{N_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{N_1} \sqrt{\frac{\pi T}{2m}} \sin \left(\frac{2\pi s}{N_1} - \frac{\pi}{N_1} + \varphi_k \right).$$

Наконец, для $N_1 >> 1$ имеем $(N_1 / \pi) \sin(\pi / N_1) \cong 1$ и получим ещё более простые выражения

$$v_{y,k,s} = \sqrt{\frac{\pi T}{2m}} \cos\left(\frac{2\pi s}{N_1} - \frac{\pi}{N_1} + \varphi_k\right), v_{z,k,s} = \sqrt{\frac{\pi T}{2m}} \sin\left(\frac{2\pi s}{N_1} - \frac{\pi}{N_1} + \varphi_k\right), q = \frac{nh}{N_1}, \quad (29)$$
$$0 \le k \le M - 1, \quad 0 \le s \le N_1 - 1.$$

Именно эти формулы используются ниже. При этом φ_k выбираются так, чтобы начальные фазы скоростей в различных ячейках $[x^k, x^{k+1}]$ были бы различны и в начальный момент времени в области D не возникли бы N_1 потоков заряженных ионов, чья неустойчивость [23] может дать паразитические флуктуации. Например, можно положить $\varphi_k = \pi / N_1 + k\sqrt{2}$, $0 \le k \le M - 1$.

В последней формуле $\sqrt{2}$ можно заменить на любое иррациональное число либо для вычисления φ_k воспользоваться датчиком случайных чисел, равномерно распределённых на отрезке $[0,2\pi]$. При обезразмеривании формулы (29) примут вид:

$$v_{y,k,s} = 58\cos\left(\frac{2\pi s}{N_1} - \frac{\pi}{N_1} + \varphi_k\right), v_{z,k,s} = 58\sin\left(\frac{2\pi s}{N_1} - \frac{\pi}{N_1} + \varphi_k\right), q = \frac{L}{N_1M}, \quad (30)$$

где L – безразмерная длина установки, при этом $[q] = [n][L] = 5 \cdot 10^{11}$.

§3. Численное решение гибридных ЭМГД-уравнений

Рассмотрим численное решение системы (12). Общие принципы были сформулированы в §2. Уравнение переноса атомов Хе с учётом ионизации, уравнения электродинамики для $E = E_y$, $j = j_y$, $H = H_x$ и уравнение энергии для $T = T_e$ решаются по разностным схемам. Фиксируем в счётной области D = [0, L] две сетки точек – целочисленную $x_k = kh$, $0 \le k \le M$, h = L/M и полуцелую $z_{k+1/2} = (k+1/2)h$, $0 \le k \le M - 1$. В целочисленных узлах аппроксимируются функции E_z , E, T, j, n_a , в полуцелых – функция H.

Уравнение переноса атомов Хе. Это уравнение решается с начальным условием $n_a(0,z) = n_{a0}(z)$, $0 \le z \le L$ и граничным условием на левом конце z = 0 $n_a(t,0) \equiv n_a = n_{a0}(0)$. Учитывая $v_a > 0$ на правом конце z = L граничное условие не требуется, функция $n_{a0}(z)$ задана. Рассмотрим разностную схему

$$\frac{n_{a,k}^1 - n_{a,k}^0}{\tau} + v_a \frac{n_{a,k}^0 - n_{a,k-1}^0}{h} = -k_I n_{a,k}^1 n_k^0, \quad 1 \le k \le M,$$

позволяющую вычислить сеточную функцию $n_{a,k}^1$ на верхнем временном слое по сеточной функции $n_{a,k}^0$ – на нижнем. При k = 0 значение $n_{a,0}^0 = n_a$ известно, в начальный момент сеточная функция $n_{a,k} = n_{a0}(kh)$, $0 \le k \le M$ также известна. В итоге $n_{a,k}^1$ вычисляется по явной формуле:

$$n_{a,k}^{1} = n_{a,k-1}^{0} \frac{v_{a}\tau / h}{1 + \tau k_{I}n_{k}^{0}} + n_{a,k}^{0} \frac{1 - \tau v_{a} / h}{1 + \tau k_{I}n_{k}^{0}}, \quad 1 \le k \le M,$$

= $n_{a}, \quad k = 0.$ (31)

При выполнении условия Куранта $\tau \leq h / v_a$ схема, очевидно, устойчива и позволяет вычислить функцию $n_{a,k}^1$ по функции $n_{a,k}^0$ при условии, что на нижнем слое известна сеточная функция n_k^0 , $0 \leq k \leq M$.

Уравнение энергии для $T = T_e$. Функция T приближённо ищется расщеплением по физическим процессам, а именно, вычисление T распадается на два этапа. На первом вычисляется изменение T в результате джоулева нагрева, ионизации и сжатия-расширения электронной жидкости. На втором этапе находится изменение T вследствие переноса. Важно, что на втором этапе расчёт T совмещается с расчётом движения макрочастиц и специальных

вычислений не требуется. Итак, переход $T^0 \to T^1$ распадается на два этапа $T^0 \to T \to T^1$. На первом этапе определяется промежуточная сеточная функция T_k , $0 \le k \le M$ по явной разностной схеме из укороченного уравнения энергии без переноса, где $v_z = v_{iz}$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\gamma - 1)T \frac{\partial v_z}{\partial z} = (\gamma - 1)\frac{m_i}{m_{\Sigma}}\frac{v_m}{\zeta}\frac{j^2}{n} + (\gamma - 1)k_T T n_a,$$

$$\frac{T_k - T_k^0}{\tau} + (\gamma - 1)T_k^0 \left(\frac{v_{z,k+1}^0 - v_{z,k-1}^0}{2h}\right) = (\gamma - 1)\frac{m_i}{m_{\Sigma}}\frac{v_{m0}}{(T_k^0)^{3/2}}\frac{(j_k^0)^2}{n_k^0} + (\gamma - 1)k_T T_k^0 n_{a,k}^0$$
(32)

с экстраполяцией v_z^0 в заграничные узлы: $v_{z,-1}^0 = 2v_{z,0}^0 - v_{z,1}^0$, $v_{z,M+1}^0 = 2v_{z,M}^0 - v_{z,M-1}^0$. На втором этапе сначала по формулам (22) температура T_k интерполируется в местоположения макрочастиц на нулевом временном слое (эта процедура называется "отемпературиванием" макрочастиц): для *s*-й макрочастицы, находящейся на нулевом слое в точке $z_s^0 \in [0, L]$, положим

$$T_s = \sum_{0}^{M} T_k p_s(k).$$

Например, по формулам **Примера 2** для $\varepsilon = h/2$ получим

$$T_{s} = \tilde{T}_{k-1} \frac{kh - z_{s}^{0}}{h} + \tilde{T}_{k} \frac{z_{s}^{0} - (k-1)h}{h}, \quad z_{s}^{0} \in [(k-1)h, kh], 1 \le k \le M.$$

После расчёта движения макрочастиц на интервале τ , при котором присвоенные температуры T_s сохраняются, получим их новые положения, относящиеся к верхнему временному слою. "Размазывая" температуры макрочастиц на верхнем слое по узлам целочисленной сетки, получим окончательные значения T_k^1 . Преимущество такого способа счёта в простоте, ненужности граничных условий для температуры и отсутствии паразитических температурных флуктуаций.

Уравнения электродинамики. Эти уравнения образуют систему

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \text{ (закон Фарадея)}, \quad j = \frac{\partial H}{\partial z} \text{ (закон Ампера)},$$

$$E - \frac{\alpha}{n} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{v_{m0}}{T^{3/2}} j - H_* v_z + \frac{\alpha j}{n} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\alpha v_z}{n} \frac{\partial j}{\partial z} \text{ (обобщённый закон Ома)},$$
(33)

где $\alpha = \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}} \xi^2$, $H_* = H(t,z) + H_0(z)$. В ЭМГД возникает проблема постановки граничных условий для электрического поля, отсутствовавшая в классической

или холловской МГД. При постановке граничных условий для поля E на концах z = 0 и z = L счётной области [0,L] будем руководствоваться следующими соображениями. Поскольку физический смысл $j = j_y$, как отмечалось в §1, – это азимутальный ток в СПД, то из физических соображений на входе (z = 0) и на выходе (z = L) из камеры установки надо поставить либо условие j = 0, либо $\partial j / \partial z = 0$. Возможна комбинация этих условий, например, на входе считаем j(0) = 0, а на выходе $\partial j / \partial z (L) = 0$. Учитывая равенство $j = \partial H / \partial z$, имеем $\partial^2 E / \partial z^2 = \partial j / \partial t$ и в случае граничного условия $j|_{z=0,L} = 0$ из обобщённого закона Ома получим краевое условие 1-го рода

$$z = 0, L: \quad E = \left(-H_* + \frac{\alpha}{n}\frac{\partial j}{\partial z}\right)v_z, \tag{34}$$

где правая часть вычисляется на нижнем временном слое посредством разностных аппроксимаций. Например, с учётом граничного условия j(0) = 0, применяя формулу Тейлора, имеем аппроксимации $\frac{\partial j}{\partial z}(0) = \frac{j_1}{h} + O(h) = \frac{j_2 - j_1}{h} + O(h) = \frac{4j_1 - j_2}{2h} + O(h^3)$, $H_0 = H_{1/2} + O(h^2)$, где все сеточные функции берутся на нулевом временном слое. Аналогичные формулы верны и на правом конце z = L. Для граничного условия $\frac{\partial j}{\partial z}\Big|_{z=0,L} = 0$, дифференцируя по z обобщённый закон Ома, получим на концах z = 0 и z = L равенства

$$E - \frac{\alpha}{n} \frac{\partial j}{\partial t} = g, \quad \frac{\partial E}{\partial z} - \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{n}\right) \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial z},$$

где g – правая часть обобщённого закона Ома. Исключая из последних соотношений $\partial j / \partial t$, получим граничное условие для *E* третьего рода:

$$z = 0, L \quad \frac{\partial E}{\partial z} - n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{n}\right) E = \frac{\partial g}{\partial z} - n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{n}\right) g =$$

$$= j \left[\frac{v_{m0}}{n} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{n}{T^{3/2}}\right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - v_z \frac{dH_0}{dz}\right] - \frac{H_*}{n} \frac{\partial n v_z}{\partial z} + \frac{\alpha v_z}{n} \frac{\partial^2 j}{\partial z^2}.$$
(35)

Здесь правая часть и коэффициент $n\partial(1/n)/\partial z$ вычисляются на нулевом временном слое посредством разностных аппроксимаций. Используя формулу Тейлора, с учётом граничного условия $\partial j / \partial z = 0$ получим, например, на левом

конце
$$j_0 = (4j_1 - j_2)/3 + O(h^3), \quad \frac{\partial^2 j}{\partial z^2}(0) = \frac{2}{3} \frac{(j_2 - j_1)}{h^2} + O(h) = \frac{-19j_1 + 26j_2 - 7j_3}{11h^2} + 0$$

 $+O(h^2)$, $H_0 = (3H_{1/2} - H_{3/2}) + O(h^2)$ и т.д., где все сеточные функции берутся на нулевом временном слое. Аналогичные формулы получаются и на правом конце, если там ставится граничное условие $\partial j / \partial z (L) = 0$.

Для увеличения порядка аппроксимации при построении разностной схемы для закона Фарадея и обобщённого закона Ома поле *E* следует вычислять на полуцелом временном слое, поэтому правую часть и коэффициент в уравнении для *E* надо также аппроксимировать сеточными функциями, заданными на полуцелом временном слое. В полном объёме реализовать эту рекомендацию можно только используя пересчёт полей и движения макрочастиц на каждом временном шаге, что кратно увеличивает время расчёта. Компромиссным вариантом является следующая разностная схема

$$\frac{H_{k+1/2}^{1} - H_{k+1/2}^{0}}{\tau} - \frac{E_{k+1} - E_{k}}{h} = 0, 0 \le k < M, \quad j_{k}^{1} = \frac{H_{k+1/2}^{1} - H_{k-1/2}^{1}}{h}, 0 < k < M, \\
E_{k} - \frac{\alpha}{n_{k}^{0}} \frac{E_{k+1} - 2E_{k} + E_{k-1}}{h^{2}} = \frac{V_{m0}}{(T_{k}^{0})^{3/2}} j_{k}^{1/2} - H_{*,k}^{1/2} v_{z,k}^{0} + \frac{\alpha j_{k}^{1/2}}{n_{k}^{0}} \frac{v_{z,k+1}^{0} - v_{z,k-1}^{0}}{2h} + \\
+ \frac{\alpha v_{z,k}^{0}}{n_{k}^{0}} \frac{j_{k+1}^{0} - j_{k-1}^{0}}{2h}, \\
0 < k < M.$$
(36)

С учётом интерполяций $H_k = (H_{k+1/2} + H_{k-1/2})/2, \ 0 < k < M, \ j_k^{1/2} = (j_k^0 + j_k^1)/2,$ $H_{*,k}^{1/2} = (H_{*,k}^0 + H_{*,k}^1)/2, \ 0 \le k \le M,$ получим

$$\begin{aligned} H_{*,k}^{1/2} &= H_{*,k}^{0} + \tau \, \frac{E_{k+1} - E_{k-1}}{4h}, \quad j_{k}^{1} = j_{k}^{0} + \frac{\tau}{h^{2}} (E_{k+1} - 2E_{k} + E_{k-1}), \\ j_{k}^{1/2} &= j_{k}^{0} + \frac{\tau}{2h^{2}} (E_{k+1} - 2E_{k} + E_{k-1}), \quad 0 < k < M. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (36), получим для нахождения сеточной функции E_k , $0 \le k \le M$ систему линейных уравнений с трёхдиагональной матрицей ленточного типа, в которой учитываются граничные условия (34) или (35) и которая решается методом прогонки. Можно показать, что при выполнении условия Куранта

$$\tau < \frac{h}{\max_{0 \le k \le M} \left| v_{z,k}^0 \right|}$$

матрица линейной системы относительно *E_k* имеет диагональное преобладание по строкам и, значит, прогонка вычислительно устойчива. После нахождения

 E_k , $0 \le k \le M$ сеточные функции $H^1_{k+1/2}$, j^1_k вычисляются из законов Фарадея и Ампера по явным формулам

$$H_{k+1/2}^{1} = H_{k+1/2}^{0} + \tau \frac{E_{k+1} - E_{k}}{h}, 0 \le k < M, \quad j_{k}^{1} = \frac{H_{k+1/2}^{1} - H_{k-1/2}^{1}}{h}, 0 < k < M.$$
(37)

Значения j_0^1 , j_M^1 определяются из граничных условий. Если j(0) = 0, то $j_0^1 = 0$, если $\partial j / \partial z (0) = 0$, то $j_0^1 = (4 j_1^1 - j_3^1) / 3$ и аналогично для правого конца. Наконец, поле E_z вычисляется по явной формуле по уже найденным сеточным функциям $H_{k+1/2}^1$, j_k^1 , $n_{a,k}^1$:

$$E_{z,k} = H_{*,k}^{1/2} v_{y,k}^0 - \frac{\lambda_e}{\lambda_{\Sigma}} \frac{k_I}{\varepsilon} n_{a,k}^{1/2} v_a - \frac{\alpha_0}{n_k^0} H_{*,k}^{1/2} j_k^{1/2} - \frac{\zeta \alpha_0}{n_k^0} \frac{n_{k+1}^0 T_{k+1}^0 - n_{k-1}^0 T_{k-1}^0}{2h}, \quad 0 \le k \le M$$
(38)

с доопределёнными заграничными значениями

$$n_{M+1}^0 T_{M+1}^0 = 2n_M^0 T_M^0 - n_{M-1}^0 T_{M-1}^0, \quad n_{-1}^0 T_{-1}^0 = 2n_0^0 T_0^0 - n_1^0 T_1^0,$$

где $\alpha_0 = \kappa \xi (\lambda_i / \lambda_{\Sigma}) \sqrt{\lambda_i / \lambda_e}$.

Расчёт движения макрочастиц. В момент времени $t = t_0$ (нижний слой) известны положения и скорости всех макрочастиц $z_s^0 \in [0, L]$, v_{yz}^0 , v_{zs}^0 , $1 \le s \le N$. На отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$ движение каждой *s*-й макрочастицы находится из решения задачи Коши для уравнения характеристик:

$$\frac{dz}{dt} = v_z, \quad \frac{dv_z}{dt} = \varepsilon (E_y + H_* v_y - v_m j), \quad \frac{dv_y}{dt} = \varepsilon (E_z + H_* v_z),$$

$$z(t_0) = z_s^0, \quad v_y(t_0) = v_{ys}^0, \quad v_z(t_0) = v_{zs}^0.$$
(39)

Эта задача решается разностным методом посредством схемы Эйлера с пересчётом. Выберем вспомогательный шаг $\tau_0 = \tau / N_0$ и сетки точек $t_n = t_0 + n\tau_0$, $0 \le n \le N_0$, $t_{n+1/2} = t_n + \tau_0 / 2$, $0 \le n < N_0$ на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$. Пусть 2х2-матрица A(t, z) и векторы D(t, z), v, v_s^0 , $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, $z \in [0, L]$ определены формулами

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_s^0 = \begin{pmatrix} v_{ys}^0 \\ v_{zs}^0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & H_* \\ -H_* & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \begin{pmatrix} E_y - v_m j \\ E_z \end{pmatrix}.$$

Схема Эйлера с пересчётом для приближённого решения уравнения (39) на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$ имеет вид:

$$(39): \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = A\mathbf{v} + \mathbf{D}, \quad \frac{dz}{dt} = v_z, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_s^0, \quad z(t_0) = z_s^0$$
$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\tau_0} = A_n \frac{\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n+1}}{2} + \mathbf{D}_n, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1,$$
$$\frac{z^{n+1/2} - z^{n-1/2}}{\tau_0} = v_z^n, \quad n = 1, \dots, N_0 - 1,$$
$$\frac{z^{1/2} - z_s^0}{\tau_0 / 2} = v_{zs}^0, \quad \frac{z^{N_0} - z^{N_0 - 1/2}}{\tau_0 / 2} = v_z^{N_0}, \quad A_n = A(t_{n+1/2}, z^{n+1/2}), \quad \mathbf{D}_n = \mathbf{D}(t_{n+1/2}, z^{n+1/2}).$$

Полученная система легко решается в матричном виде:

$$\boldsymbol{v}^{n+1} = \left(\mathbf{I}_2 - \frac{\tau_0}{2}A_n\right)^{-1} \left(\mathbf{I}_2 + \frac{\tau_0}{2}A_n\right) \boldsymbol{v}^n + \tau_0 \left(\mathbf{I}_2 - \frac{\tau_0}{2}A_n\right)^{-1} \boldsymbol{D}_n, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1,$$

$$z^{n+1/2} = z^{n-1/2} + \tau_0 v_z^n, \quad n = 1, \dots, N_0 - 1, \quad z^{1/2} = z_s^0 + \frac{\tau_0}{2} v_{zs}^0, \quad z^{N_0} = z^{N_0 - 1/2} + \frac{\tau}{2} v_z^{N_0}$$

с учётом явных формул

$$\begin{split} \left(\mathbf{I}_{2} - \frac{\tau_{0}}{2}A_{n}\right)^{-1} &= \left(1 + \frac{\tau_{0}^{2}\varepsilon^{2}H_{*n}^{2}}{4}\right)^{-1} \left(\begin{array}{ccc}1 & \frac{\tau_{0}\varepsilon H_{*n}}{2}\\ -\frac{\tau_{0}\varepsilon H_{*n}}{2} & 1\end{array}\right), \\ \left(\mathbf{I}_{2} - \frac{\tau_{0}}{2}A_{n}\right)^{-1} \left(\mathbf{I}_{2} + \frac{\tau_{0}}{2}A_{n}\right) &= \left(1 + \frac{\tau_{0}^{2}\varepsilon^{2}H_{*n}^{2}}{4}\right)^{-1} \left(\begin{array}{ccc}1 - \frac{\tau_{0}^{2}\varepsilon^{2}H_{*n}^{2}}{4} & \tau_{0}\varepsilon H_{*n}\\ -\tau_{0}\varepsilon H_{*n} & 1 - \frac{\tau_{0}^{2}\varepsilon^{2}H_{*n}^{2}}{4}\end{array}\right), \\ H_{*n} &= H_{*}(t_{n+1/2}, z^{n+1/2}) = H(t_{n+1/2}, z^{n+1/2}) + H_{0}(z^{n+1/2}). \end{split}$$

Точка $z^{n+1/2}$ – это положение *s*-й макрочастицы на отрезке [0, *L*] в момент времени $t_{n+1/2}$. Поэтому для вычисления элементов матрицы A_n и компонент вектора D_n необходимо интерполировать значения полей E_y , E_z , H_x , j_y , v_m в местоположение $z^{n+1/2}$ *s*-й макрочастицы по их значениям в узлах сетки $z_k = kh$, $0 \le k \le M$ посредством формул (22):

$$E_{y} = \sum_{k=0}^{M} E_{y,k} p_{s}(k), \quad E_{z} = \sum_{k=0}^{M} E_{z,k} p_{s}(k), \quad \nu_{m} = \sum_{k=0}^{M} \nu_{m,k}^{0} p_{s}(k),$$

$$H = \sum_{k=0}^{M} \left[H_{k}^{0} \left(1 - \frac{t_{n+1/2}}{\tau} \right) + H_{k}^{1} \frac{t_{n+1/2}}{\tau} \right] p_{s}(k), \quad j = \sum_{k=0}^{M} \left[j_{k}^{0} \left(1 - \frac{t_{n+1/2}}{\tau} \right) + j_{k}^{1} \frac{t_{n+1/2}}{\tau} \right] p_{s}(k), \quad (40)$$

где левые части (40) вычисляются в точке $(t_{n+1/2}, z^{n+1/2})$, а множители $p_s(k)$ – по формулам (22). В частности, интерполяция E_y , E_z , v_m не зависит от $t_{n+1/2}$. Вычисляя $p_s(k)$ по формулам **Примеров 1–4** получим различные серии интерполяционных формул, для которых в правых частях равенств (40) отличны от нуля только два слагаемых.

Примем следующие граничные условия для макрочастиц. Если *s*-я макрочастица в момент времени $t = t_{n+1/2}$ достигает правой границы z = L, то вычисляется импульс $q_s v_z^n$ и величина $q_s v_z^n / \tau$ добавляется в силу тяги СПД, счёт *s*-й частицы останавливается и начинается расчёт следующей *s*+1-й макрочастицы. Если *s*-я макрочастица в момент времени $t = t_{n+1/2}$ достигает левой границы z = 0, то она (по соглашению) либо зеркально отражается от левой границы, либо теряет свою продольную скорость: $v_z^n = -v_z^n$ либо $v_z^n = 0$, v_y^n остаётся без изменения, и счёт движения *s*-й макрочастицы продолжается.

Наконец, τ_0 выбирается для каждой макрочастицы индивидуально. Основное требование – за время τ_0 *s* -я макрочастица должна смещаться на величину ~ *h*.Откуда $\tau_0 |v_{zs}^0| \le h$ и, значит, $N_0 \ge \tau |v_{zs}^0| / h$. Поэтому полагаем $\tau_0 = \tau / N_0, N_0 = \max \{ N_*, \operatorname{Int}(\tau |v_{zs}^0| / h) \}$, где N_* – минимальное число узлов на τ .

Вычисление средних величин в узлах сетки. Концентрация ионов n и средняя скорость ионов v_i в узлах оснащённой сетки $(\{r^k\}, \{D_k\})$ задаётся в общем случае формулами (22), конкретизация которых применительно к одномерной задаче определяется Примерами 1–4. Рассмотрим вычисление температуры на втором этапе. После первого этапа известны значения промежуточной температуры \tilde{T}_k , заданной в узлах r^k . Интерполяцией по формулам (22) доопределим сеточную функцию \tilde{T}_k до функции $\tilde{T}(\mathbf{x})$, заданной всюду в области D. Рассмотрим решение задачи Коши:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \langle \boldsymbol{v}, \nabla_{\boldsymbol{x}} H \rangle + \langle \boldsymbol{F}, \nabla_{\boldsymbol{v}} H \rangle = 0, \quad \boldsymbol{x} \in D, \quad H|_{t=t_0} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \tilde{T}(\boldsymbol{x})$$

(с граничными условиями, определяемыми граничными условиями для функции распределения ионов f, на которых здесь останавливаться не будем) и функцию

$$\hat{T} = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} H f dv$$

Несложно показать, что \hat{T} удовлетворяет уравнению переноса

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + v_i \cdot \nabla \hat{T} = \varepsilon(t, \mathbf{x}) \underset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n} \nabla_{\mathbf{x}} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) H f d\mathbf{v}, \quad v_i = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f d\mathbf{v}, \quad n = \int_{\mathbb{R}^3} f d\mathbf{v}$$

В силу начального условия для H имеем $\varepsilon(t_0, \mathbf{x}) \equiv 0$, $\mathbf{x} \in D$. Отсюда следует оценка [24]

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + \tau \atop \mathbf{x} \in D} \left| \hat{T} - T \right| = O(\tau^2),$$

где T – решение уравнения переноса $\partial T / \partial t + \mathbf{v}_i \cdot \nabla T = 0$, $T |_{t=t_0} = \tilde{T}(\mathbf{x})$. Поэтому изменение промежуточной температуры \tilde{T} вследствие переноса со скоростью \mathbf{v}_i за шаг τ можно определить по функции \hat{T} с ошибкой $O(\tau^2)$. Функция $n\hat{T}$ в узлах сетки \mathbf{r}^k приближённо вычисляется по формулам типа (17), (22). Действительно, учитывая $\hat{T} |_{\mathbb{R}^3 \setminus D} \equiv 0$, $n |_{\mathbb{R}^3 \setminus D} \equiv 0$ имеем (ниже $\mathbf{r} = \mathbf{x}$, $d\mathbf{r} = d\mathbf{x}$):

$$\begin{split} \left| D \cap D_{k} \right| (n\hat{T})(\mathbf{r}^{k}) &\cong \int_{D \cap D_{k}} n\hat{T}d\mathbf{r} = \int_{D_{k}} n\hat{T}d\mathbf{r} = \int_{D_{k} \times \mathbb{R}^{3}} Hf d\mathbf{r} d\mathbf{v} \cong \\ &\cong \int_{D_{k} \times \mathbb{R}^{3}} Hf_{\varepsilon} d\mathbf{r} d\mathbf{v} = \sum_{j} H_{j} q_{j} \int_{D_{k}} \delta_{\varepsilon} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) d\mathbf{r} + \\ &+ \sum_{j} q_{j} \int_{D_{k}} \delta_{\varepsilon} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}(t)) \left(\int_{\mathbb{R}^{3}} (H - H_{j}(t)) \Delta_{\varepsilon} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{j}(t)) d\mathbf{v} \right) d\mathbf{r}, \end{split}$$
(41)

где $H_j(t) = H(t, \mathbf{r}_j(t), \mathbf{v}_j(t))$. Второй интеграл в правой части (41) имеет порядок $O(\varepsilon)$. Поскольку H постоянно на характеристиках $(\mathbf{r}_j(t), \mathbf{v}_j(t))$, то $H_j(t) \equiv \text{const} = H_j(t_0) = \tilde{T}(r_j(t_0)) = T_j$, где T_j – результат интерполяции промежуточной температуры \tilde{T}_k на j-ю макрочастицу. Поэтому из (41) вытекает приближённая формула типа (17), (22):

$$T_{k}^{1} = T^{1}(\mathbf{r}^{k}) = \hat{T}^{1}(\mathbf{r}^{k}) + O(\tau^{2}) = \sum_{j} T_{j}q_{j}p_{j}^{D}(k) \left[\sum_{j} q_{j}p_{j}^{D}(k)\right]^{-1} + O(\tau^{2}) + \frac{O(\varepsilon)}{h} \cong \sum_{j} T_{j}q_{j}p_{j}^{D}(k) \left[\sum_{j} q_{j}p_{j}^{D}(k)\right]^{-1},$$
(42)

где $p_j^D(k)$ вычисляются по формулам (22) на верхнем временном слое. В частности, если $\varepsilon \sim h^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, то $O(\varepsilon)/h \sim h^{\alpha}$. Тем самым получено обоснование расчёта температуры на втором этапе и выведена формула (42) для температуры на верхнем временном слое. Наконец, второй интеграл в правой

части (41) разбивается на два, если представить $H - H_j$ в виде $H - H_j = H(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_j(t)) - H_j + \Phi$. Разложение Φ по степеням $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j(t))^{\alpha}$ $(\alpha - M)$ мультииндекс) начинается с членов порядка $|\alpha|=1$, которые дают нулевой вклад в интеграл по $d\mathbf{v}$, если $\Delta_{\varepsilon}(\mathbf{v}) = (\sqrt{\pi}\varepsilon)^{-3} \exp(-v^2/\varepsilon^2)$, а члены порядка $|\alpha|>1$ при интегрировании по $d\mathbf{v}$ дают слагаемые ~ ε^2 . Что касается первого слагаемого $H(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_j(t)) - H_j$, оно даёт интеграл

$$\int_{D_k} \delta_{\varepsilon}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j(t)) (H(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j(t)) - H_j) d\boldsymbol{r},$$

имеющий, согласно теореме о среднем, порядок ~ diamsupp δ_{ε} ~ ε .

Учёт ионизации. На каждом временном шаге τ после завершения вычислений параметров СПД на верхнем временном слое в области Dвбрасывается M + 1 макрочастица – по одной в каждом узле – с параметрами $z_s = (s-1)h$, $v_{ys} = 0$, $v_{zs} = v_a$, $q_s = \tau n_{a,k}^{1/2} n_k^0 k_I$, $T_s = T_*$ – температура ионизации, $1 \le s \le M + 1$. Указанные макрочастицы добавляются к уже имеющимся.

Общая схема вычислений. 1) В начальный момент времени t = 0 в каждой из M ячеек, на которые разбита область D, помещаются N_1 частиц с $z_{s} = (k - 1/2)h$, координатами (29), (30)) (см. скоростями $v_{vs} = w_0 \sin(2\pi s / N_1 + k\sqrt{2}),$ $v_{zs} = w_0 \cos(2\pi s / N_1 + k\sqrt{2}),$ одинаковыми температурами $T_s = T_*$ и одинаковыми массами $q_s = q = L/(N_1M), 1 \le s \le N_1,$ $1 \le k \le M$, параметры q, T_* , w_0 , M, N_1 задаются; 2) на нижнем временном слое $t = t_0$ известны величины z_s^0 , v_{ys}^0 , v_{zs}^0 , T_s^0 , q_s , s – номер макрочастицы, $H_{x,k+1/2}^0$, $0 \le k < M$, а переход с нижнего $(t = t_0)$ на верхний $(t = t_0 + \tau)$ временной слой происходит по этапам; 3) по формулам (22), (42) вычисляются средние величины n_k^0 , v_{yk}^0 , v_{zk}^0 , T_k^0 , $0 \le k \le M$ в узлах $z_k = kh$, $0 \le k \le M$ оснащённой сетки по параметрам макрочастиц на нижнем слое, перечисленным в 2); 4) вычислим шаг τ из условий Куранта $\tau \le h / v_a$, $\tau \le h / \max_{0 \le k \le M} |v_{zk}^0| (v_a - \text{скорость})$ поступления атомов Xe в СПД), если $t_0 + \tau > tot$ – общее время расчёта, то вычисления останавливаются; 5) вычислим j_k^0 , $0 \le k \le M$ из закона Фарадея с учётом граничных условий, например, для граничных условий (34) $j_k^0 = (H_{x,k+1/2}^0 - H_{x,k-1/2}^0) / h, 0 < k < M, j_0^0 = j_M^0 = 0; 6)$ вычислим промежуточную температуру \tilde{T}_k , $0 \le k \le M$ по формулам (32); 7) интерполируя по формулам (22), вычислим температуру \tilde{T} на каждой макрочастице T_s ; 8) по формулам (31) вычислим концентрацию атомов Xe на верхнем слое $n_{a,k}^1$, $0 \le k \le M$; 9) вычислим прогонкой $E_{y,k}$, $0 \le k \le M$ по схеме (36) с выбранными граничными

условиями либо вида (34), либо вида (35); 10) вычислим $H_{x,k+1/2}^1$, $0 \le k < M$ по формулам (37); 11) вычислим $E_{z,k}$, $0 \le k \le M$ по формулам (38); 12) выполним расчёт движения макрочастиц по схеме Эйлера с пересчётом с учётом интерполяционных формул (40) и найдём значения на верхнем слое z_s^1 , v_{ys}^1 , v_{zs}^1 , T_s^1 , q_s для каждой *s*-й макрочастицы; 13) добавим к оставшимся (с учётом возможной убыли на правой границе области D) макрочастицам M + 1 новых с параметрами $z_s = (s-1)h$, $v_{ys} = 0$, $v_{zs} = v_a$, $T_s = T_*$, $q_s = \tau n_{a,k}^{1/2} n_k^0 k_I$, $1 \le s \le M + 1$, после чего переходим к п. 2), заменяя t_0 на $t_0 + \tau$.

Дополнительные рекомендации. 1) По указанным выше формулам счёт ведётся с учётом сглаживающих добавок к $T_e^{3/2}$ и *n*, когда эти величины входят в знаменатели разностных аппроксимаций. Эти добавки гарантируют, в частности, невозможность деления на нуль при проведении вычислений.

2) Параметр ε в формулах для средних величин и интерполяции (22) и (42), входящий в них через множители $p_j(k)$, зависящие от $\delta_{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t))$, следует выбирать так, чтобы его возможное уменьшение не меняло бы результат расчёта. Например, для h = 0.01 расчёты с $\varepsilon = h/2, h/4, h/8, ..., h/2^n, ...$ стабилизируются начиная с $n = 4 \div 5$. Поэтому надо считать $\varepsilon = h/16 \div h/32$. С физической точки зрения, величина ε , на которой возникает стабилизация расчётов, определяется равенством $\varepsilon \cong r_D$, где r_D – радиус Дебая.

3) Для получения физически осмысленных результатов необходимо на каждом временном шаге сглаживать расчётные параметры плазмы, и прежде всего электромагнитное поле. Процедура сглаживания основана либо на организации вычислений по схеме предиктор-корректор (называемой обычно *пересчётом*), либо на использовании осреднения параметров плазмы посредством преобразования Стеклова, задаваемого формулой

$$f(x) \mapsto f_{\delta}(x) \stackrel{=}{=} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(\tau) d\tau,$$

где *δ* – параметр осреднения. Возможна комбинация обоих приёмов.

§4. Некоторые результаты расчётов

Рассмотрим численное решение системы (12) в двух случаях: (I) индукционные поля в плазме СПД равны нулю – $E_y = 0$, $H_x = 0$, $E_z \equiv E_0 = \text{const}$; (II) индукционные поля ненулевые, причём граничные условия для E_y определяются равенствами $j_y(0) = j_y(L) = 0$.

В случае (I) плазма движется во внешнем постоянном и однородном электромагнитном поле $H_x \equiv H_0$, $E_y = 0$, $E_z \equiv E_0$. Результаты расчётов для двух

наборов входных данных представлены на рис. 4 ($k_I = 1$, $v_a = 0.1$, $n_a = 10$, $\varepsilon = 1$, $E_0 = 1$, $H_0 = 1$) и рис. 5 ($k_I = 1.1$, $v_a = 0.1$, $n_a = 10$, $\varepsilon = 1$, $E_0 = 1.9$, $H_0 = 1.9$).



В обоих случаях M = 100, $N_1 = 100$, общее начальное число макрочастиц равно 10^4 , масса макрочастицы в начальный момент времени $q = 10^{-3}$, начальное распределение концентрации атомов Xe $n_{0,a}(z) = 2n_a / (2 + 10^5 z)$ – быстро спадающая гипербола. В обоих вариантах наступает стабилизация при $t \rightarrow +\infty$ течения плазмы в СПД, что нетипично для численного метода макрочастиц и является важным результатом работы предложенного численного алгоритма. Сила тяги F_T выходит либо на установление (в первом варианте на рис. 6 $F_T \cong 120$ при $t \to +\infty$), либо на квазипериодический режим (во втором варианте на рис. 7 F_T имеет среднее значение при $t \to +\infty$, равное ≈ 75). Ускорение плазмы $v_z(L) / v_z(0)$ достигает в первом варианте 7.5, а во втором – 5.4. Как показывают результаты расчётов, течение плазмы в СПД с учётом ионизации во внешних полях очень чувствительно к значению коэффициента ионизации k_1 – при увеличении k_1 резко растёт амплитуда колебаний силы тяги.



В случае (II) два варианта расчётов представлены на рис. 8–11. Они отличаются способом осреднения электромагнитного поля, которое надо выполнить перед расчётом движения макрочастиц. На рис. 8, 9 представлены расчёты для осреднения полей H_x , E_y , E_z , j_y , v_m по формуле:

$$f(z) \to \hat{f}(z) = \frac{1}{2\ell h} \int_{z-\ell h}^{z+\ell h} \tilde{f}(x) dx, \quad 0 \le z \le L,$$
(43)

где $1 \le \ell \le M$, h = L/M, а $\tilde{f}(z)$ – функция, продолжающая f(z) на отрезок [-L,L] по чётности и затем на всю прямую \mathbb{R} по 2L-периодичности. Результаты на рис. 10, 11 отвечают модифицированному осреднению по формуле

$$f(z) \to \hat{f}(z) = \frac{1}{def} \frac{1}{b(z) - a(z)} \int_{a(z)}^{b(z)} f(x) dx, \quad 0 \le z \le L,$$

$$a(z) = \max\{z - \ell h, 0\}, \quad b(z) = \min\{z + \ell h, L\}, \quad 1 \le \ell \le M.$$
(44)

Результаты, представленные на рис. 8–11, соответствуют M = 100, $N_1 = 100$, $\ell = 20$ и для каждой из функций $f = H_x, E_y, ..., v_m$ процедуры осреднения (43) или (44) на каждом временном шаге выполняются пятикратно. Согласно §1, являются макроскопическими полями, характерные масштабы H_x,\ldots,V_m которых, в соответствии с электронной теорией Лоренца [25], должны быть много больше размера макрочастиц, имеющих порядок ~ h. Чтобы добиться соблюдения этого требования, и необходимо осреднение. Формулы осреднения подбираются экспериментально, имея целью получения квазистационарных режимов течения плазмы в СПД. Представленные варианты на рис. 8-11 отвечают данным $q = 10^{-3}$, $k_I = 1$, $v_a = 0.1$, $n_a = 10$, $\kappa = 1$, $\xi = 0.532$, $\varepsilon = 1$, $\zeta = 0.061, H_0 = 1.$ Качественное поведение плазмы в СПД в обоих вариантах примерно одинаковое. Учёт индукционных полей привёл к существенному росту ускорения плазмы $v_z(L) / v_z(0)$ и, как следствие, увеличению среднего значения силы тяги F_T , равному $\cong 400$. При этом продольное электрическое поле E_z качественно совпадает с экспериментальным [3], особенно для варианта рис. 8. При осреднении полей по формулам (43), (44) происходит выход динамики плазмы в СПД на квазистационарный режим. Период колебаний F_T составляет $\cong 40\tau$, где $\tau = h / \max_{0 \le z \le L} v_z(z)$ – временной шаг.





Список литературы

- 1. Козубский К.Н., Мурашко В.М., Рылов В.П., Трифонов Ю.В., Ходенко В.П., Ким В.П., Попов Г.А., Обухов В.А. СПД работает в космосе // Физика плазмы. 2003. Т. 29. № 3. С. 277–792.
- 2. Kim V., Kozubsky K.N., Murashko V.M., Semenkin A.V. History of the Hall Thrusters Development in USSR // Paper IEPC-2007-142. 30th International Electric Propulsion Conference. September 17–20, 2007. Florence. Italy.
- 3. Ким В.П., Семенкин А.В., Хартов С.А. Конструктивные и физические особенности двигателей с замкнутым дрейфом электронов. М.: Изд-во МАИ, 2016. 160 с.
- 4. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2006 576 с.
- 5. Волков Б.И., Якунин С.А. Математические задачи плазмооптики. М.: Знание, 1982. – 64 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, кибернетика"; № 11).
- 6. Быков А.А., Попов В.Ю., Свешников А.Г., Якунин С.А. Внутренние переходные слои потенциала в сильно замагниченной плазме // Математическое моделирование. Т. 1. № 6. 1989. С. 33–47.

- L. Garrigues, A. Héron, J.C. Adam, J.P. Boeuf Hybrid and Particle-In-Cell Models of a Stationary Plasma Thruster // Plasma Source Sci. Technol. 9 (2000) 219–226.
- 8. A.I. Morozov, V.V. Savelyev. Fundamentals of Stationary Plasma Thruster Theory // Reviews of Plasma Physics. P. 203–391.
- 9. Гавриков М.Б. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика. М.: КРАСАНД. 2018. 584 с.
- 10.Перепёлкина А.Ю., Левченко В.Д. Трехмерная полностью кинетическая численная модель замагниченной плазмы на основе LRnLA алгоритмов \\ Сб. «Физические и математические модели плазмы и плазмоподобных сред». М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2012. С. 45–56.
- 11. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: Мир, 1965. 212с.
- 12.Имшенник В.С. О теплопроводности плазмы // Астрономический журнал. 1961. Т. 38. № 4. С. 652–655.
- 13. Чэпмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
- 14.Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. № 2. С. 203–209.
- 15.Морозов А.И. Эффект пристеночной проводимости в хорошо замагниченной плазме // ПМТФ. 1968. № 3. С. 19–23.
- 16.Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. Избранные труды / Сост. Г.И. Змиевская, В.Д. Левченко М.: Физматлит, 2001. 288 с.
- 17.Березин Ю.А., Вшивков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1980. 95 с.
- 18.Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 640 с.
- 19.Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989. 452 с.
- 20.Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953. 291 с.
- 21. Арсеньев А.А. Лекции о кинетических уравнениях. М.: Наука, 1992. 216 с.
- 22.Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- 23. Электродинамика плазмы / под ред. А.И. Ахиезера. М.: Наука, 1974. 719 с.
- 24.Гавриков М.Б. Численный метод решения уравнений негидродинамической модели плазменного шнура с двумя сортами ионов и излучением // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. М.: 1986 г. № 188. 27 с.
- 25. Лоренц Г.А. Теория электромагнитного поля. М.: ОНТИ, 1933.

Оглавление

Введение	
§1. Гибридная ЭМГД-модель плазмы в СПД	6
§2. Метод макрочастиц	
§3. Численное решение гибридных ЭМГД-уравнений	
§4. Результаты расчётов	
Список литературы	