



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 11 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Г.И. Казакевич, [Ю.А. Повещенко](#),
[В.О. Подрыга](#), [П.И. Рагимли](#),
А.Э. Бакир, А.К. Абу-Наб

Математическое
моделирование диссоциации
газовых гидратов в пористой
среде с учетом льда и соли

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Математическое моделирование диссоциации газовых гидратов в пористой среде с учетом льда и соли / Г.И. Казакевич [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 11. 26 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-11>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-11>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**Г.И. Казакевич, Ю.А. Повещенко, В.О. Подрыга,
П.И. Рагимли, А.Э. Бакир, А.К. Абу-Наб**

**Математическое моделирование
диссоциации газовых гидратов
в пористой среде с учетом льда и соли**

Москва — 2022

Казакевич Г.И., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Рагимли П.И., Бакир А.Э., Абу-Наб А.К.

Математическое моделирование диссоциации газовых гидратов в пористой среде с учетом льда и соли

В работе к задачам подземной гидромеханики, связанным с газовыми гидратами и учитывающим наличие льда и фазовый переход лед-вода, а также присутствие соли, последовательно применен метод расщепления по физическим процессам. Системы приведены к блочному виду, с разделением диссипативной и гиперболической части. Методом характеристик показано, что обычную аппроксимацию коэффициентов против потока здесь надо модифицировать. Используя правило фаз Гиббса, произведен выбор определяющих переменных в зонах течения, отличающихся друг от друга по количеству фаз и компонент. Построена общая математическая модель для всей области протекания процесса.

Ключевые слова: математическое моделирование, газовые гидраты, многокомпонентная фильтрация, многолетнемерзлые породы

Kazakevich G.I., Poveshchenko Yu.A., Podryga V.O., Rahimly P.I., Bakeer A.E, Abu-Nab A.K.

Mathematical modeling of dissociation of gas hydrates in porous medium taking into account ice and salt

In the work, the method of splitting by physical processes is consistently applied to the problems of underground hydromechanics associated with gas hydrates and taking into account the presence of ice and the ice-water phase transition, as well as the presence of salt. The systems are reduced to the block form, with the separation of the dissipative and hyperbolic parts. It was shown by the method of characteristics that the usual approximation of the upwind coefficients should be modified here. Using the Gibbs phase rule, a choice was made of the determining variables in the flow zones that differ from each other in the number of phases and components. A general mathematical model has been built for the entire area of the process.

Keywords: mathematical modeling, gas hydrates, multicomponent filtration, permafrost

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного фонда Болгарии, проект № 20-51-18004-Болг_а.

The reported study was funded by RFBR and National Science Foundation of Bulgaria (NSFB), project number 20-51-18004-Bolg_a.

1. Введение

В настоящее время в мире уделяется большое внимание изучению природных газовых гидратов как возможных источников сырья и потенциальной угрозы, связанной с выделением метана при их разрушении, в частности, под воздействием климатических изменений. Часть обнаруженных и гипотетических скоплений газовых гидратов связана с зонами многолетнемерзлых пород и шельфом арктических морей. Во многих работах выдвигаются и подробно исследуются гипотезы о связи ряда природных процессов, в том числе и катастрофического характера, таких как образование воронок на суше в северных регионах, широкомасштабное выделение газа на дне океанов, с разложением гидратов. В силу недостаточности фактических данных эта проблема является дискуссионной, выдвигаются аргументы за и против. Одним из методов исследования здесь является математическое моделирование. При его применении к процессам, связанным с газовыми гидратами в криолитозоне северных регионов и на шельфе арктических морей, в общей схеме расчетов фильтрационных процессов необходимо учесть еще одну фазу – лед. В подобных задачах также существенно влияние соли на условия термодинамического равновесия гидратов [1, 2], поскольку соль содержится в морской воде, а также используется в технологических процессах в качестве ингибитора. Работа посвящена разработке математической модели диссоциации газовых гидратов в пористой среде, позволяющей учесть наличие льда и соответствующего фазового перехода, соли, а также растворенного газа. В качестве основы взяты уравнения баланса масс, импульса и энергии в предположении о термодинамически равновесном характере процесса.

В качестве основного метода исследования используется расщепление по физическим процессам, предложенное в работе [3]. В его основе лежит разделение системы на диссипативное уравнение и сатурационный блок, отвечающий за конвективный перенос параметров, связанных с насыщенностями, и обладающий в основном гиперболическими свойствами. Такое расщепление позволяет применять явно-неявные разностные схемы при решении задач и избегать сильного измельчения временного шага.

В работе проводится последовательное расширение возможностей метода путем включения в единую методику все большего количества компонент и фаз, которые, как отмечено выше, естественным образом встречаются в ряде научных, технических, экологических задач.

Изложение ведется в порядке усложнения включаемых в рассмотрение физических процессов. В разделе 2 к рассмотренной в предыдущих работах системе «газ – вода – газовые гидраты» добавляется новая фаза – лед. В разделе 3 с помощью метода характеристик исследуются свойства уравнений сатурационного блока. В разделе 4 дополнительно добавляются соль и растворенный газ.

2. Расщепление по физическим процессам в математической модели системы «газ – вода – газовые гидраты – лед»

Для гидратно-равновесной зоны (ГРЗ) исходные уравнения неразрывности (уравнения баланса массы флюидов – компонент жидкой фазы (или льда) и газа в свободном и связанном состояниях) в пористой среде могут быть записаны в следующей дивергентной форме (для воды и газа, соответственно):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ m \left(S_v S_w \rho_{wi} + (1 - S_v) \rho_v \beta_w \right) \right\} + \operatorname{div} [\rho_w \mathbf{V}_w] + q_w = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ m \left(S_v (1 - S_w) \rho_g + (1 - S_v) \rho_v (1 - \beta_w) \right) \right\} + \operatorname{div} [\rho_g \mathbf{V}_g] + q_g = 0. \quad (2)$$

Уравнение баланса энергии имеет следующий дивергентный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ m \left[S_v (S_w \rho_{wi} \varepsilon_{wi} + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1 - S_v) \rho_v \varepsilon_v \right] + (1 - m) \rho_s \varepsilon_s \right\} + \\ + \operatorname{div} \left\{ \rho_w \varepsilon_w \mathbf{V}_w + \rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g + P (\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right\} + \operatorname{div} \mathbf{W} + q_s = 0, \quad (3) \\ \mathbf{W} = - \left(m \left(S_v (S_w \lambda_{wi} + (1 - S_w) \lambda_g) + (1 - S_v) \lambda_v \right) + (1 - m) \lambda_s \right) \nabla T, \end{aligned}$$

где индексы g, w, i, v, s относятся к газу, воде, льду, гидрату, скелету пористой среды, wi относится к водно-ледяной смеси; P – давление, T – температура, t – время, $m = m(\mathbf{r}, P)$ – пористость, \mathbf{r} – радиус-вектор, S_w – водонасыщенность (вода и лед), β_w – массовая доля воды в гидрате. $S_g = 1 - S_w$ – газонасыщенность, v – гидратонасыщенность, $S_v = 1 - v$ – растепленность, $\rho_l = \rho_l(P, T)$, $\lambda_l = \lambda_l(P, T)$, $\varepsilon_l = \varepsilon_l(P, T)$ – плотности, коэффициенты теплопроводности, внутренние энергии компонент ($l = g, w, v, s, i$), \mathbf{V}_α и q_α – скорость фильтрации и плотность источников фазы $\alpha = w, g$.

Введем некоторые обозначения:

$C_i + C_w = 1$, C_i, C_w – объемные доли твердого льда (H_2O) и жидкой воды (H_2O);

$\rho_{wi} = C_w \rho_w + C_i \rho_i$ – плотность водно-ледяной смеси;

$S_{vi} = S_v (1 - (1 - C_w) S_w)$ – объемная доля пор ($m \delta V$) с жидкой водой (H_2O) и свободным метаном (CH_4);

$S_{wi} = \frac{C_w S_w}{C_w S_w + (1 - S_w)}$ – водонасыщенная доля водно-ледяной смеси (т.е. доля жидкой воды в порах (газ, жидкая вода)).

Твердая часть объема пор ($m\delta V$) будет соответственно:

$$(1 - S_{vi}) = [(1 - S_v) + (1 - C_w)S_w S_v].$$

Термодинамические параметры: $\lambda_{wi} = C_w \lambda_w + (1 - C_w) \lambda_i$ – коэффициент теплопроводности водно-ледяной смеси, $\varepsilon_{wi} = [C_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - C_w) \rho_i \varepsilon_i] / \rho_{wi}$ – ее внутренняя энергия.

Капиллярными силами пренебрегаем. Предполагается, что скорости фильтрации жидкой и газовой фаз в пористой среде удовлетворяют закону Дарси:

$$\mathbf{V}_\alpha = -\frac{k_i \cdot k_{rai}}{\mu_\alpha} (\nabla P - \mathbf{g} \rho_\alpha), \alpha = w, g, \quad (4)$$

где \mathbf{g} – вектор ускорения свободного падения, $k_i = k(\mathbf{r}, S_{vi}, P)$ – перерасчет абсолютной проницаемости $k(\mathbf{r}, S_v, P)$ с учетом части пор с замерзшей водой, $k_{rai} = k_{ra}(S_{wi})$ – перерасчет относительных фазовых проницаемостей $k_{ra}(S_w)$, $\mu_\alpha = \mu_\alpha(P, T)$ – вязкости воды и газа.

Систему уравнений (1), (2) при фиксированных значениях определяющих термодинамических переменных будем называть **сатурационным блоком**, имея в виду, что эти уравнения служат для определения водонасыщенности S_w и растепленности S_v .

Зависимость переменных от давления и температуры в зоне фазового равновесия в итоге сводится к зависимости от давления в силу соотношения фазового равновесия, конкретный вид которого не влияет на математическую структуру системы уравнений, описывающей процесс. Изучению этих соотношений посвящено много исследований. В численных расчетах, проведенных с помощью разрабатываемой модели, использовалась следующая зависимость [4]:

$$T = T_{dis}(P) = A \ln P + B, \quad (5)$$

где A и B – эмпирические константы.

Внутренняя энергия гидрата выражается через энергии составляющих его газа и водно-ледяной смеси следующим образом:

$$\beta_w i_{wi} + (1 - \beta_w) i_g = i_v + h_{tr}, \quad (6)$$

где h_{tr} – скрытая теплота фазового перехода единицы массы гидрата,

$$i_l = \varepsilon_l + P / \rho_l \quad (7)$$

– энтальпия, $\varepsilon_l(P, T)$ – внутренняя энергия фаз, индекс $l \equiv g | w | wi | v$ указывает фазу.

Запишем систему уравнений для **талой области**, в которой нет гидратов и, соответственно, $S_v = 1$.

В этом случае уравнения неразрывности баланса энергии (1) – (3) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(mS_w\rho_{wi}) + \operatorname{div}[\rho_w\mathbf{V}_w] + q_w = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m(1-S_w)\rho_g) + \operatorname{div}[\rho_g\mathbf{V}_g] + q_g = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ m(S_w\rho_{wi}\varepsilon_{wi} + (1-S_w)\rho_g\varepsilon_g) + (1-m)\rho_w\varepsilon_w \right\} + \\ & + \operatorname{div} \left\{ \rho_w\varepsilon_w\mathbf{V}_w + \rho_g\varepsilon_g\mathbf{V}_g + P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right\} + \operatorname{div}\mathbf{W} + q_\varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{W} = -\left(m(S_w\lambda_{wi} + (1-S_w)\lambda_g) + (1-m)\lambda_s\right)\nabla T$.

Система уравнений (1) – (5) полностью описывает фильтрационные процессы в пористой среде с жестким скелетом, насыщенной газовыми гидратами, как при их образовании, так и при распаде, в **гидратно-равновесной зоне**.

Аналогично, система уравнений (8) – (10) описывает фильтрационные процессы для **талой зоны** при отсутствии гидратов.

Основное пьезопроводно-диссипативное уравнение теории гидратов для определения давления P , аналогично [3], получаем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & m\delta_\varepsilon \left\{ S_v \left[S_w \frac{(\rho_{wi})_t}{\rho_{wi}} + (1-S_w) \frac{(\rho_g)_t}{\rho_g} \right] + (1-S_v) \frac{(\rho_v)_t}{\rho_v} + \frac{(m)_t}{m} \right\} + \\ & + \frac{\Psi}{m\rho_v} \left\{ m \left\{ S_v \left[S_w\rho_{wi}(\varepsilon_{wi})_t + (1-S_w)\rho_g(\varepsilon_g)_t \right] + (1-S_v)\rho_v(\varepsilon_v)_t \right\} \right\} + \\ & + \frac{\Psi}{m\rho_v} \left[(1-m)\rho_s\varepsilon_s \right]_t + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\Psi}{m\rho_v} DIG_\varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$DIG = \frac{1}{\rho_{wi}} \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + \frac{1}{\rho_g} \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) + \left(\frac{q_w}{\rho_{wi}} + \frac{q_g}{\rho_g} \right), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} DIG_\varepsilon = & \left[\operatorname{div}(\rho_w \varepsilon_w \mathbf{V}_w) - \varepsilon_{wi} \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) \right] + \left[\operatorname{div}(\rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g) - \varepsilon_g \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) \right] + \\ & + \operatorname{div} \left[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right] + \operatorname{div} \mathbf{W} + (q_\varepsilon - \varepsilon_{wi} q_w - \varepsilon_g q_g) = (\varepsilon_w - \varepsilon_{wi}) \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + \\ & + \rho_w \mathbf{V}_w \nabla \varepsilon_w + \rho_g \mathbf{V}_g \nabla \varepsilon_g + \operatorname{div} \left[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right] + \operatorname{div} \mathbf{W} + (q_\varepsilon - \varepsilon_{wi} q_w - \varepsilon_g q_g). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\frac{\psi}{m\rho_v} = \left(\varphi - \frac{1}{\rho_v} \right) \geq 0, \quad \varphi = \frac{\beta_w}{\rho_{wi}} + \frac{(1-\beta_w)}{\rho_g} \quad (14)$$

– скачок удельного объема (на единицу массы),

$$\delta_\varepsilon = \beta_w \varepsilon_{wi} + (1-\beta_w) \varepsilon_g - \varepsilon_v \geq 0, \quad (15)$$

– скачок удельной внутренней энергии (на единицу массы).

Вводя коэффициент бароемкости гидратной системы:

$$\begin{aligned} D_p = m\delta_\varepsilon \left\{ S_v \left[S_w \frac{(\rho_{wi})_p}{\rho_{wi}} + (1-S_w) \frac{(\rho_g)_p}{\rho_g} \right] + (1-S_v) \frac{(\rho_v)_p}{\rho_v} + \frac{(m)_p}{m} \right\} + \\ + \frac{\psi}{m\rho_v} \left\{ m \left\{ S_v \left[S_w \rho_{wi} (\varepsilon_{wi})_p + (1-S_w) \rho_g (\varepsilon_g)_p \right] + (1-S_v) \rho_v (\varepsilon_v)_p \right\} + \right. \\ \left. + [(1-m) \rho_s \varepsilon_s]_p \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

перепишем уравнение (11) в компактной форме:

$$D_p \frac{\partial P}{\partial t} + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\psi}{m\rho_v} DIG_\varepsilon = 0. \quad (17)$$

Для талой безгидратной зоны диссипативный блок:

$$\frac{S_w}{\rho_{wi}} \frac{\partial}{\partial t} (m\rho_{wi}) + \frac{1-S_w}{\rho_g} \frac{\partial}{\partial t} (m\rho_g) + DIG = 0, \quad (18)$$

где

$$DIG = \frac{1}{\rho_{wi}} \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + \frac{1}{\rho_g} \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) + \left(\frac{q_w}{\rho_{wi}} + \frac{q_g}{\rho_g} \right) \quad (19)$$

и

$$m \left[S_w \rho_{wi} \frac{\partial \varepsilon_{wi}}{\partial t} + (1 - S_w) \rho_g \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} \right] + \frac{\partial}{\partial t} [(1 - m) \rho_s \varepsilon_s] + DIG_\varepsilon = 0, \quad (20)$$

где

$$DIG_\varepsilon = (\varepsilon_w - \varepsilon_{wi}) \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + \rho_w \mathbf{V}_w \nabla \varepsilon_w + \rho_g \mathbf{V}_g \nabla \varepsilon_g + \operatorname{div}[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)] + \operatorname{div} \mathbf{W} + (q_\varepsilon - \varepsilon_{wi} q_w - \varepsilon_g q_g). \quad (21)$$

Таким образом, произведено полное расщепление задачи для гидратно-равновесной и талой зон по физическим процессам для последующего численного решения связанной задачи.

Выведенная система уравнений является обобщением системы, полученной в работе [3], на процессы, связанные с газовыми гидратами в условиях, допускающих существование льда.

3. Исследование сатурационного блока методом характеристик

В данном разделе для простоты предполагаем $\mathbf{g} = \mathbf{0}$.

3.1. Свойства блока переноса насыщенностей S_v , S_w при $0 \leq C_w \leq 1$

Из системы уравнений (1), (2) получаем следующую систему:

$$(S_v)'_t + \frac{1}{\psi} \frac{\rho_w}{\rho_{wi}} \frac{P'_x}{\mu_w} (k_i k_{rwi})'_x + \frac{1}{\psi} \frac{P'_x}{\mu_g} (k_i k_{rgi})'_x = \langle \dots \rangle, \quad (22)$$

$$(S_w)'_t - \frac{\rho_w}{\rho_{wi}} \frac{\psi_g}{m S_v \psi} \frac{P'_x}{\mu_w} (k_i k_{rwi})'_x + \frac{\psi_w}{m S_v \psi} \frac{P'_x}{\mu_g} (k_i k_{rgi})'_x = \langle \dots \rangle. \quad (23)$$

Выпишем только диагональные члены в матрице пространственных производных для S_v и S_w :

$$(S_v)'_t + \left\{ \frac{(k_i)'_{S_{vi}}}{\psi} \left[\frac{\rho_w}{\rho_{wi}} \frac{k_{rwi}}{\mu_w} + \frac{k_{rgi}}{\mu_g} \right] P'_x(S_{vi})'_{S_v} \right\} (S_v)'_x + \langle \dots \rangle (S_w)'_x = \langle \dots \rangle, \quad (24)$$

$$(S_w)'_t + \langle \dots \rangle (S_v)'_x + \left\{ \begin{aligned} & \frac{(k_i)'_{S_{vi}}}{mS_v\psi} \left[\frac{-\rho_w}{\rho_{wi}} \frac{k_{rwi}}{\mu_w} \psi_g + \frac{k_{rgi}}{\mu_g} \psi_w \right] P'_x(S_{vi})'_{S_w} - \\ & - \frac{k_i}{mS_v\psi} \left[\frac{\rho_w}{\rho_{wi}} \frac{(k_{rwi})'_{S_{wi}}}{\mu_w} \psi_g - \frac{(k_{rgi})'_{S_{wi}}}{\mu_g} \psi_w \right] P'_x(S_{wi})'_{S_w} \end{aligned} \right\} (S_w)'_x = \langle \dots \rangle \quad (25)$$

Здесь запись $\langle \dots \rangle$ означает отсутствие в ней пространственно-временных производных от величин S_v и S_w ;

$$\frac{\psi_g}{m\rho_v} = \frac{1-\beta_w}{\rho_g} - \frac{1-S_w}{\rho_v} \text{ при } S_{wi} > S_{w\min},$$

$$\frac{\psi_w}{m\rho_v} = \frac{\beta_w}{\rho_{wi}} - \frac{S_w}{\rho_v} \text{ при } S_{wi} < S_{w\max}.$$

Очевидно, что $\psi = \psi_w + \psi_g > 0$.

$$(S_{vi})'_{S_v} = (1 - C_i S_w) > 0, \quad (S_{vi})'_{S_w} = -C_i S_v < 0, \quad (S_{wi})'_{S_w} = \frac{C_w}{(1 - C_i S_w)^2} > 0. \quad (26)$$

Поскольку анализ с помощью характеристик знаков потоков системы уравнений, аналогичной (1) – (4), но без гидратов (случай $S_v = 1$), дает для инварианта S_w выражения, аналогичные $-P'_x \psi_g$ и $-P'_x \psi_w$, но без функций ψ_g и ψ_w , условием сшивки гидратной и безгидратной областей течений являются требования

$$\frac{\psi_g}{m\rho_v} = \frac{1-\beta_w}{\rho_g} - \frac{1-S_w}{\rho_v} > 0 \text{ при } S_{wi} > S_{w\min}, \quad (27)$$

$$\frac{\psi_w}{m\rho_v} = \frac{\beta_w}{\rho_{wi}} - \frac{S_w}{\rho_v} > 0 \text{ при } S_{wi} < S_{w\max}. \quad (28)$$

Требования (27), (28) с точки зрения покомпонентных скачков удельного (на единицу массы) объема при фазовом переходе могут быть проинтерпретированы следующим образом. При полном разложении единицы массы гидрата объем освободившегося газа должен быть больше $(1 - S_w)$ -доли объема в гидратном льде. При полном разложении единицы массы гидрата объем освободившейся водно-ледяной смеси должен быть больше S_w -доли объема в гидратном льде.

«Гиперболический» анализ сатурационного блока (1), (2) показывает, что при разностной аппроксимации:

1. В флюидокомпонентах абсолютной проницаемости $k_i = k(S_{vi})$ необходимо брать растеplенности S_v вниз по потоку, т.к. $\frac{\rho_w}{\rho_{wi}} \frac{k_{rwi}}{\mu_w} + \frac{k_{rgi}}{\mu_g} > 0$.

2. В флюидокомпонентах абсолютной проницаемости $k_i = k(S_{vi})$ водонасыщенность S_w берется вверх по потоку, если $-\frac{\rho_w}{\rho_{wi}} \frac{k_{rwi}}{\mu_w} \psi_g + \frac{k_{rgi}}{\mu_g} \psi_w > 0$,

и S_w берется вниз по потоку, если $-\frac{\rho_w}{\rho_{wi}} \frac{k_{rwi}}{\mu_w} \psi_g + \frac{k_{rgi}}{\mu_g} \psi_w < 0$.

3. В флюидокомпонентах относительных проницаемостей $k_{rwi} = k_{rw}(S_{wi})$ и $k_{rgi} = k_{rg}(1 - S_{wi})$ водонасыщенность S_w берется вверх по потоку при $\frac{\rho_w}{\rho_{wi}} \frac{(k_{rwi})'_{S_{wi}}}{\mu_w} \psi_g - \frac{(k_{rgi})'_{S_{wi}}}{\mu_g} \psi_w > 0$.

Сеточная аппроксимация (up-вверх или down-вниз по потоку) для C_w и C_i будет уточняться в дальнейшем.

3.2. Свойства переноса водно-ледяной фазы ($0 < C_w < 1$, $P'_i = T'_i = 0$) при гидратном равновесии

В пространственных областях, где имеет место фазовое равновесие водно-ледяной смеси ($0 < C_w < 1$), температура фазового перехода T_0 и давление P считаются постоянными и известными. Уравнение пьезопроводности (11) используется при этом для расчета процессов переноса объемной доли водно-ледяной фазы C_w . В зонах, где постоянны и фиксированы $C_w = 1$ (т.е. вода при $T \geq T_0$) или $C_w = 0$ (лед при $T \leq T_0$), оно же применяется для расчета эволюции термодинамических параметров T и P . Соответствующие области динамически изменяются во времени с необязательной поверхностной

границей раздела фаз (задача Стефана), что изучается с помощью специальных вычислительных алгоритмов. В данном разделе мы исследуем гиперболические свойства процесса переноса водно-ледяной фазы ($0 < C_w < 1$, $P'_t = T'_t = 0$) при гидратном равновесии.

В случае четырехфазного (гидрат, газ, водно-ледяная смесь) термодинамического равновесия уравнение пьезопроводности (11) принимает вид:

$$m\delta_\varepsilon \left\{ S_v \left[S_w \frac{1}{\rho_{wi}} \frac{\partial \rho_{wi}}{\partial t} \right] \right\} + \frac{\psi}{m\rho_v} \left\{ m \left\{ S_v \left[S_w \rho_{wi} \frac{\partial \varepsilon_{wi}}{\partial t} \right] \right\} \right\} + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\psi}{m\rho_v} DIG_\varepsilon = 0, \quad (29)$$

где

$$DIG = \frac{1}{\rho_{wi}} \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + \frac{1}{\rho_g} \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) + \left(\frac{q_w}{\rho_{wi}} + \frac{q_g}{\rho_g} \right), \quad (30)$$

$$DIG_\varepsilon = \left[\operatorname{div}(\rho_w \varepsilon_w \mathbf{V}_w) - \varepsilon_w \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) \right] + (\varepsilon_w - \varepsilon_{wi}) \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + \left[\operatorname{div}(\rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g) - \varepsilon_g \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) \right] + \operatorname{div} \left[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right] + \operatorname{div} \mathbf{W} + (q_\varepsilon - \varepsilon_{wi} q_w - \varepsilon_g q_g). \quad (31)$$

Учитывая, что

$$(\rho_{wi})'_t = (\rho_w - \rho_i)(C_w)'_t, \quad \rho_w > \rho_i, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{wi})'_t &= [(C_w \rho_w \varepsilon_w + C_i \rho_i \varepsilon_i) / (C_w \rho_w + C_i \rho_i)]'_t = \\ &= \frac{1}{\rho_{wi}^2} [\rho_{wi} (\rho_w \varepsilon_w - \rho_i \varepsilon_i) (C_w)'_t - \rho_{wi} \varepsilon_{wi} (\rho_w - \rho_i) (C_w)'_t] = \\ &= \frac{1}{\rho_{wi}} [\rho_w (\varepsilon_w - \varepsilon_{wi}) + \rho_i (\varepsilon_{wi} - \varepsilon_i)] (C_w)'_t, \quad \varepsilon_w > \varepsilon_{wi} > \varepsilon_i, \end{aligned} \quad (33)$$

получаем уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& mS_v S_w \left\{ \delta_\varepsilon \frac{(\rho_w - \rho_i)}{\rho_{wi}} + \frac{\psi}{m\rho_v} [\rho_w(\varepsilon_w - \varepsilon_{wi}) + \rho_i(\varepsilon_{wi} - \varepsilon_i)] \right\} (C_w)'_t + \\
& + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\psi}{m\rho_v} DIG_\varepsilon = 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Полагая

$$C_{wi} = mS_v S_w \left\{ \delta_\varepsilon \frac{(\rho_w - \rho_i)}{\rho_{wi}} + \frac{\psi}{m\rho_v} [\rho_w(\varepsilon_w - \varepsilon_{wi}) + \rho_i(\varepsilon_{wi} - \varepsilon_i)] \right\} > 0, \tag{35}$$

получаем более компактную форму уравнения пьезопроводности:

$$C_{wi} (C_w)'_t + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\psi}{m\rho_v} DIG_\varepsilon = 0. \tag{36}$$

Далее преобразуем выражения (30), (31):

$$DIG = - \left\{ \frac{\rho_w}{\rho_{wi}} \frac{1}{\mu_w} (k_i k_{rwi})'_{C_w} + \frac{1}{\mu_g} (k_i k_{rgi})'_{C_w} \right\} P'_x (C_w)'_x + \langle \dots \rangle, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
DIG_\varepsilon = & - \left\{ [\rho_w(\varepsilon_w - \varepsilon_{wi}) + P] \frac{1}{\mu_w} (k_i k_{rwi})'_{C_w} + P \frac{1}{\mu_g} (k_i k_{rgi})'_{C_w} P'_x \right\} + \\
& + mS_v S_w (\lambda_w - \lambda_i) T'_x \} (C_w)'_x + \langle \dots \rangle.
\end{aligned} \tag{38}$$

Здесь выражения $\langle \dots \rangle$ не содержат производных от C_w по t и x . Очевидно также, для коэффициента теплопроводности водно-ледяной фазы $\lambda_{wi} = C_w \lambda_w + (1 - C_w) \lambda_i$ справедливо $(\lambda_{wi})'_{C_w} = \lambda_w - \lambda_i$. Поэтому величина C_w в выражении $\lambda_{wi}(C_w)$ аппроксимируется вверх по тепловому потоку ($-\lambda_{wi} T'_x$), если $\lambda_w > \lambda_i$. И наоборот – вниз по тепловому потоку при $\lambda_w < \lambda_i$.

Для абсолютной проницаемости в выражениях (37), (38) справедливы оценки:

$$k_i = k(S_{vi}), S_{vi} = S_v (1 - C_i S_w), (S_{vi})'_{C_w} = S_v S_w > 0, (k_i)'_{C_w} = (k(S_{vi}))'_{S_{vi}} (S_{vi})'_{C_w} > 0.$$

Для относительной проницаемости воды имеем:

$$k_{rwi} = k_{rw}(S_{wi}), S_{wi} = \frac{C_w S_w}{1 - C_i S_w}, (S_{wi})'_{C_w} = \frac{S_w(1 - S_w)}{(1 - C_w S_w)^2} > 0,$$

$$(k_{rwi})'_{C_{wi}} = (k_{rw}(S_{wi}))'_{S_{wi}} (S_{wi})'_{C_w} > 0.$$

Таким образом, получаем $(k_i k_{rwi})'_{C_w} > 0$, т.е. в (37) и (38) в выражениях $(k_i k_{rwi})$ величины C_w и C_i аппроксимируются вверх по фильтрационному потоку. Аналогично, для относительной проницаемости газа имеем следующие оценки:

$$k_{rgi} = k_{rg}(1 - S_{wi}), (k_{rgi})'_{C_{wi}} = (k_{rg}(1 - S_{wi}))'_{S_{wi}} (S_{wi})'_{C_w} < 0.$$

Отсюда:

$$(k_i k_{rgi})'_{C_w} = (k_i)'_{C_w} k_{rgi} + k_i (k_{rgi})'_{C_w}.$$

Т.е. в (37) и (38) в выражениях $(k_i k_{rgi})$ величины C_w , C_i , входящие в k_i , аппроксимируются вверх по фильтрационному потоку. Наоборот, эти величины C_w , C_i , входящие в относительную газовую проницаемость k_{rgi} , аппроксимируются вниз по фильтрационному потоку.

3.3. Свойства переноса насыщенности S_w при $0 \leq C_w \leq 1$ в гидратно-талой зоне ($S_v = 1$)

Из уравнения (12) получаем следующую форму уравнения переноса водонасыщенности

$$m \rho_{wi} (S_w)'_t - \rho_w \frac{1}{\mu_w} (k_i k_{rwi})'_{S_w} P'_x (S_w)'_x = \langle \dots \rangle.$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ не содержит производных от S_w по t и x , и $S_v = 1$.

Для проницаемостей справедливо представление

$$(k_i k_{rwi})'_{S_w} = k_i (k_{rwi})'_{S_w} + (k_i)'_{S_w} k_{rwi} = k_i (k_{rw})'_{S_{wi}} (S_{wi})'_{S_w} + (k_i)'_{S_{vi}} (S_{vi})'_{S_w} k_{rwi}.$$

Имеют место также оценки (см. раздел 2.2):

$$(k_{rw})'_{S_{wi}} > 0, (S_{wi})'_{S_w} > 0, (k_i)'_{S_{vi}} > 0, (S_{vi})'_{S_w} < 0.$$

Отсюда в $k_{rwi} = k_{rw}(S_{wi})$ при $S_{wi} = C_w S_w / (1 - C_i S_w)$ S_w аппроксимируется вверх по фильтрационному потоку. В $k_i = k(S_{vi})$ при $S_{vi} = 1 - C_i S_w$ и $S_v = 1$ выбираем S_w вниз по потоку.

3.4. Свойства переноса водно-ледяной фазы ($0 < C_w < 1$, $T'_i = 0$) в гидратно-талой зоне ($S_v = 1$)

Уравнения пьезопроводности (18) и энергии (20) решаются совместно относительно приращений ∂P и ∂C_w при $T_0 = const$ в зоне водно-ледяного фазового перехода. В частности, в приближении $div \mathbf{W} = 0$ из (20) можно выразить ∂C_w через ∂P и подставить в (18). Анализ процессов переноса водно-ледяной фазы C_w в талой зоне ($S_v = 1$) аналогичен гидратно-равновесному случаю (см. раздел 2.2).

В частности, C_w, C_i берутся вверх по потоку для k_i и k_{rwi} , а для k_{rgi} эти величины (C_w, C_i) выбираются вниз по фильтрационному потоку.

4. Расщепление по физическим процессам в математической модели системы «газ – вода – газовые гидраты – лед – соль»

В данном разделе проведено исследование термодинамически равновесной фильтрационной модели в газогидратной зоне с тремя компонентами (H_2O , газ, соль) жидко-ледяной и газовой смеси в пористой среде с возможными твердофазными солевыми осадочными включениями. В результате выделен блок процессов переноса с первой парой базовых переменных [6, 7] – насыщенностями гидратной фазы и жидко-ледяной-осадочной консистенции с последующим исследованием в дискретных алгоритмах способов аппроксимаций переноса этих насыщенностей, учитывающих гиперболический характер уравнений. Для трехкомпонентной зоны гидратного равновесия в фазово-соприкасающейся системе переменного состава фаз получены уравнения, описывающие пьезопроводные и дольно-солевые процессы, характеризующие эволюцию термодинамических переменных, а также объемных концентраций в жидко-ледяной-осадочной консистенции в пористой среде и эволюцию массовых долей воды, газа и соли в жидкой фазе. Вышеупомянутые пьезопроводное и дольно-солевое уравнения необходимы для нахождения второй пары базовых переменных, зависящей от рассматриваемой задачи. Для определения вспомогательных переменных используется правило фаз Гиббса [8].

Рассмотрены следующие варианты:

- жидкая фаза в гидратно-равновесной зоне (ГРЗ) с насыщенными газом и солью;
- солевой осадок и жидкая фаза в ГРЗ с насыщенными газом и солью;
- ненасыщенная солью жидко-ледяная смесь в ГРЗ;
- насыщенная солью жидко-ледяная смесь в ГРЗ;
- солевой осадок и жидко-ледяная смесь в ГРЗ;
- солевой осадок в ГРЗ в отсутствие жидкой фазы.

4.1. Исходная дивергентная система массовых и энергетических балансов среды

Для ГРЗ исходные уравнения неразрывности (уравнения баланса массы флюидов – компонент жидкой фазы (или льда) и газа в свободном и не свободном состояниях) могут быть записаны в следующей дивергентной форме для воды (w), газа (g) и соли (c – в растворе, b – осадок) соответственно:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m[S_v S_{lib} R_{wi} + (1 - S_v) \beta_w \rho_v]\} + \text{div}[\beta_l^w \rho_l \mathbf{V}_l + \mathbf{M}_l^w] = 0, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{m[S_v (1 - S_{lib}) \rho_g + (1 - S_v)(1 - \beta_w) \rho_v + S_v S_{lib} C_l \beta_l^g \rho_l]\} + \\ + \text{div}[\rho_g \mathbf{V}_g + \beta_l^g \rho_l \mathbf{V}_l + \mathbf{M}_l^g] = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m[S_v S_{lib} R_{cb}]\} + \text{div}[\beta_l^c \rho_l \mathbf{V}_l + \mathbf{M}_l^c] = 0. \quad (41)$$

Уравнение баланса полной внутренней энергии системы, включая скелет, имеет следующий дивергентный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{m[S_v (S_{lib} E_{lib} + (1 - S_{lib}) \rho_g \varepsilon_g) + (1 - S_v) \rho_v \varepsilon_v] + (1 - m) \rho_s \varepsilon_s\} + \\ + \text{div}\{\rho_l \varepsilon_l \mathbf{V}_l + \rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g + P(\mathbf{V}_l + \mathbf{V}_g) + \mathbf{W}\} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь m – пористость; индексы обозначают: v – гидрат, l – жидкая фаза, включающая воду (w), растворенные в ней газ (g) и соль (c), g – свободный газ, i – лед, b – осадок соли, s – скелет; S_v – растепленность порового пространства от гидратов, $(1 - S_v)$ – его гидратонасыщенность; индекс lib отвечает суммарно жидкой фазе, льду и солевому осадку в растепленном поровом пространстве; S_{lib} – их объемная доля в (mS_v) . Для объемных долей C_l , C_i , C_b , объединенных в

S_{lib} , выполнено соотношение: $C_l + C_i + C_b = 1$. Далее, β_w и $(1 - \beta_w)$ – массовые доли воды и газа в гидрате. В жидкой фазе (l) для компонентных массовых долей воды (β_l^w) и растворенных в ней газа (β_l^g) и соли (β_l^c) также выполнено соотношение: $\beta_l^w + \beta_l^g + \beta_l^c = 1$. В ГРЗ принимается, что $\beta_l^g = \beta_l^g(P, T)$. Если газ в жидкой фазе отсутствует, то ($\beta_l^g = 0$). Соответственно массовая доля воды и соли в жидкой фазе $\beta_l^{wc} = \beta_l^w + \beta_l^c = 1 - \beta_l^g = \beta_l^{wc}(P, T)$, либо $\beta_l^{wc} = 1$ при $\beta_l^g = 0$. Плотности и их доли обозначены как $\{\rho_\chi, \chi = v, l, w, i, g, b, lib, s\}$, где $\rho_{lib} = C_l \rho_l + C_i \rho_i + C_b \rho_b$. Также вводятся дольные плотности: $R_{wi} = C_l \beta_l^w \rho_l + C_i \rho_i$ – всей воды и льда, содержащихся в S_{lib} , и $R_{cb} = C_l \beta_l^c \rho_l + C_b \rho_b$ – всей соли, содержащейся в S_{lib} .

Аналогично, $\{\varepsilon_\chi, \chi = v, l, w, i, g, b, lib, s\}$ – внутренние энергии единицы массы гидрата, жидкой фазы, воды, льда, свободного газа, солевого осадка, также внутренние энергии единицы массы S_{lib} -консистенции и скелета. При этом для $E_{lib} = \rho_{lib} \varepsilon_{lib}$ – внутренней энергии жидкой фазы, льда и солевого осадка, нормированной единицей объема, в S_{lib} -консистенции выполнено $E_{lib} = C_l \rho_l \varepsilon_l + C_i \rho_i \varepsilon_i + C_b \rho_b \varepsilon_b$. Для скорости фильтрации жидкой и газовой фаз в пористой среде используется известный закон Дарси, $\{\mathbf{V}_\alpha = -k_{lib} \cdot k_{r\alpha} / \mu_\alpha (\nabla P - \mathbf{g}\rho_\alpha), \alpha = l, g\}$, несколько видоизмененный по сравнению с формулой (4) в связи с необходимостью перерасчета проницаемостей: k_{lib} – абсолютная проницаемость $k(\mathbf{r}, S_v, P)$, зависящая от растепленности гидратов S_v , с учетом части пор занятой льдом и солевым осадком; k_{rl} и k_{rg} – относительные фазовые проницаемости жидкости и свободного газа с учетом подвижности в S_{lib} -консистенции только жидкой фазы (l).

Диффузионные потоки воды, газа и соли в жидкой фазе представлены процессом молекулярной диффузии $\{\mathbf{M}_l^\alpha = -m D_l^\alpha \rho_l \nabla \beta_l^\alpha, D_l^\alpha = D_{l0}^\alpha / \theta^2; \alpha = w, g, c\}$ с коэффициентами молекулярной диффузии D_{l0}^α вне пор и геометрической извилистостью $\theta^2 = m^{-1}$ [9]. Совместный диффузионный поток воды и соли в жидкой фазе определяется как $\mathbf{M}_l^{wc} = \mathbf{M}_l^w + \mathbf{M}_l^c$. Поток тепла в уравнении внутренней энергии (42) дается как $\mathbf{W} = -\{m[S_v(S_{lib} \lambda_{lib} + (1 - S_{lib}) \lambda_g) + (1 - S_v) \lambda_v] + (1 - m) \lambda_s\} \nabla T$ и определяет общий тепловой поток в среде с коэффициентами $\{\lambda_\chi(P, T), \chi = v, l, w, i, g, b, lib, s\}$. Здесь $\lambda_{lib} = C_l \lambda_l + C_i \lambda_i + C_b \lambda_b$.

4.2. Расщепление по физическим процессам

Нашей дальнейшей целью будет исключить из эволюционного процесса (т.е. из-под знака производной по времени) насыщенности S_{lib} и S_v , определив динамику двух оставшихся базовых переменных пьезопроводным и дольно-солевым уравнениями. Обозначим расщепленные переменные вектором $\boldsymbol{\pi} = \{P, T, C_\gamma, \beta_l^\alpha; \gamma = l, i, b, \alpha = w, g, c\}$, состоящим из двух базовых переменных $\boldsymbol{\pi}_2$ и шести вспомогательных (за исключением варианта 7 с одной базовой переменной $\boldsymbol{\pi}_1$ и вырожденным дольно-солевым уравнением).

Временной оператор D_t^π , определяющий пьезопроводную термодинамическую и дольно-концентрационную эволюцию вектора $\boldsymbol{\pi}$, запишем как

$$D_t^\pi = \Delta_\varepsilon D_t^R + \frac{\Psi}{m\rho_v} \{ mS_v [S_{lib} R_{wibc} \frac{\partial \zeta_{lib}}{\partial t} + (1 - S_{lib}) R_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial t}] + \frac{\partial [(1-m)\rho_s \varepsilon_s]}{\partial t} + \\ + m(1 - S_v) [\frac{\partial (\rho_v \varepsilon_v)}{\partial t} - \beta_w \zeta_{lib} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} - (1 - \beta_w) \zeta_g \frac{\partial R_v}{\partial t}] - \zeta_g \frac{\partial [mR_l^g]}{\partial t} \}, \\ D_t^R = mS_v [\frac{S_{lib}}{R_{wibc}} \frac{\partial R_{wibc}}{\partial t} + \frac{(1 - S_{lib})}{R_g} \frac{\partial R_g}{\partial t}] + \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{1}{R_g} \frac{\partial}{\partial t} [mR_l^g] + \\ + m(1 - S_v) [\frac{\beta_w}{R_{wibc}} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{(1 - \beta_w)}{R_g} \frac{\partial R_v}{\partial t}].$$

Тогда из общей системы дивергентных массовых и энергетических балансов (39) – (42) следует уравнение пьезопроводности для гидратно-равновесной зоны с жидким раствором и твердофазными включениями в виде:

$$D_t^\pi + \Delta_\varepsilon \cdot \Delta IG + \frac{\Psi}{m\rho_v} \cdot \Delta IG_\varepsilon = 0. \quad (43)$$

Здесь вышеприведенные комбинации массовых и энергетических дивергенций даются следующими выражениями:

$$\Delta IG = \text{div}[\beta_l^{wc} (\rho_l \mathbf{V}_l) + \mathbf{M}_l^{wc}] / R_{wibc} + \text{div}[\rho_g \mathbf{V}_g + \beta_l^g (\rho_l \mathbf{V}_l) + \mathbf{M}_l^g] / R_g, \\ \Delta IG_\varepsilon = \{ \text{div}[\varepsilon_l (\rho_l \mathbf{V}_l)] - \zeta_{lib} \text{div}[\beta_l^{wc} (\rho_l \mathbf{V}_l) + \mathbf{M}_l^{wc}] \} + \\ + \{ \text{div}[\varepsilon_g (\rho_g \mathbf{V}_g)] - \zeta_g \text{div}[\rho_g \mathbf{V}_g + \beta_l^g (\rho_l \mathbf{V}_l) + \mathbf{M}_l^g] \} + \text{div}\{P(\mathbf{V}_l + \mathbf{V}_g) + \text{div}\mathbf{W}\}.$$

Здесь $\Psi / m\rho_v = \beta_w / R_{wicb} + (1 - \beta_w) / r_g - 1 / \rho_v$, $\Delta_\varepsilon = \beta_w \zeta_{lib} + (1 - \beta_w) e_g - \varepsilon_v$ – удельные скачки (на единицу массы) объёма и внутренней энергии при фазовом разложении гидрата в свободный газ и S_{lib} -консистенцию. Далее уточняются поправки в модели, связанные с растворённым в жидкой фазе (объёмная доля C_l в S_{lib} -консистенции) газом с массовой долей β_l^g .

Дольная плотность без учета растворённого газа (т.е. всей воды, льда, растворённой и осадочной соли в S_{lib} -консистенции):

$$R_{wicb} = R_{wi} + R_{cb} = C_l \beta_l^{wc} \rho_l + C_i \rho_i + C_b \rho_b \rightarrow \rho_{lib} \text{ при } C_l \beta_l^g \rightarrow 0.$$

$$R_l^g = C_l \beta_l^g \rho_l \rightarrow 0, \quad R_g = \rho_g - R_l^g \rightarrow \rho_g, \quad R_v = \rho_v - \frac{R_l^g}{1 - \beta_w} \rightarrow \rho_v, \quad r_g = \frac{R_g \rho_v}{R_v} \rightarrow \rho_g.$$

Дольные плотности газа и гидрата, встречающиеся в различных представлениях и стремящиеся к обычным ρ_g и ρ_v при отсутствии растворённого газа ($C_l \beta_l^g \rightarrow 0$):

$$R_l^g = C_l \beta_l^g \rho_l \rightarrow 0, \quad R_g = \rho_g - R_l^g \rightarrow \rho_g, \quad R_v = \rho_v - \frac{R_l^g}{1 - \beta_w} \rightarrow \rho_v, \quad r_g = \frac{R_g \rho_v}{R_v} \rightarrow \rho_g.$$

Дольные массовые плотности внутренней энергии в S_{lib} -консистенции и внутренней энергии газа в различных представлениях, стремящиеся к обычным ε_{lib} и ε_g при отсутствии растворённого газа ($C_l \beta_l^g \rightarrow 0$), имеют вид:

$$\zeta_{lib} = \varepsilon_{lib} \rho_{lib} / R_{wicb} \rightarrow \varepsilon_{lib}, \quad \zeta_g = \varepsilon_g \rho_g / R_g \rightarrow \varepsilon_g, \quad e_g = \zeta_g R_v / \rho_v \rightarrow \varepsilon_g.$$

Временной оператор D_t^c , определяющий дольно-солевую эволюцию расщепленных переменных вектора π , запишем как

$$D_t^c = \frac{\Psi}{m\rho_v} \left\{ R_{cb} \left[m S_v S_{lib} \frac{\partial R_{wi}}{\partial t} + \beta_w m (1 - S_v) \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right] - R_{wi} \left[m S_v S_{lib} \frac{\partial R_{cb}}{\partial t} \right] \right\} - \beta_w R_{cb} D_t^R.$$

Из общей системы дивергентных массовых балансов (39) – (42) следует

$$D_t^c + \Delta I G_c = 0. \quad (44)$$

Здесь выражением

$$\Delta IG_c = \Psi / (m\rho_v) \{ R_{cb} [\text{div}(\beta_l^w \rho_l \mathbf{V}_l + \mathbf{M}_l^w)] - R_{wi} [\text{div}(\beta_l^c \rho_l \mathbf{V}_l + \mathbf{M}_l^c)] \} - \beta_w R_{cb} \Delta IG$$

дается вышеприведенная комбинация массовых дивергенций.

Это есть записанное в общем виде дольно-солевое уравнение для ГРЗ в соленой жидко-ледяной и газовой смеси, определяющее наряду с уравнением пьезопроводности временную эволюцию двух расщепленных базовых переменных из вектора $\boldsymbol{\pi}$. Заметим, что при отсутствии соли ($\beta_l^c \rightarrow 0$, $C_b \rightarrow 0$), дольно-солевое уравнение переходит в нулевое тождество.

4.3. Описание постановок задач и соответствующих базовых переменных в ГРЗ

Для описания термодинамически равновесного состояния трехкомпонентной системы {H₂O, (CH₄, CO₂ или др.), соль} необходимо увеличенное на единицу количество независимых базовых переменных. Для этого описания может быть использована дивергентная система из четырех массово-энергетических балансов (39) – (42). В случае исследуемой нами ГРЗ в соленой жидко-ледяной и газовой смеси двумя из четырех базовых переменных являются насыщенности S_{lib} и S_v и для их вычисления два уравнения дивергентной системы (например, (39) – (40)) могут быть употреблены в итерационном процессе, после того как станут известными переменные вектора $\boldsymbol{\pi} = \{P, T, C_\gamma, \beta_l^\alpha; \gamma = l, i, b; \alpha = w, g, c\}$. Две из этих восьми переменных, так же как насыщенности S_{lib} и S_v , являются независимыми базовыми (вектор $\boldsymbol{\pi}_2$) в зависимости от рассматриваемых ниже задач. Для их вычисления на неявном слое по времени (неявной итерации $s+1$ итерационного процесса) используются физически расщепленные с общей дивергентной системой (39) – (42) уравнение гидратно-равновесной пьезопроводности (43) и дольно-солевое уравнение (44) для этой же зоны. Эти уравнения (в эволюционных операторах D_t^x и D_t^c) не содержат производных по времени от насыщенностей S_{lib} , S_v , и поэтому насыщенности в итерационном процессе в пьезопроводном и дольно-солевом блоках берутся на явной s -й итерации. Нормировочные соотношения $C_l + C_i + C_b = 1$ и $\beta_l^w + \beta_l^g + \beta_l^c = 1$ используются для определения шести небазовых переменных из вектора $\boldsymbol{\pi}$. Исключением является описанный ниже вариант 7 – отсутствие кристаллического солевого осадка ($C_b = 0$) и жидкой фазы ($C_l = 0$) при температурах ниже ее замерзания. Также всюду считается, что $\beta_l^g = \beta_l^g(P, T)$, т.е. жидкая фаза либо насыщена газом, либо он в ней отсутствует ($\beta_l^g = 0$).

Ниже исследовано несколько вариантов процессов в ГРЗ, базовые переменные для которых вычисляются с помощью пьезопроводного (43) и дольно-солевого (44) уравнений. Теплота фазовых переходов энтальпий гидрата в воду (и газ) считается согласованной с переходом гидрата в лед (и газ) и льда в воду при температуре замерзания воды.

1. Жидкая фаза в ГРЗ с насыщенными газом и солью.

$$\pi_2 = \{P, T\}, C_l = 1, C_i = C_b = 0, \beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c, \beta_l^g = \beta_l^g(P, T), \beta_l^c = \beta_l^c(P, T).$$

В ГРЗ жидкая фаза выше температуры замерзания содержит насыщенный в воде газ (либо его отсутствие, $\beta_l^g = 0$) и насыщенный раствор соли. Лед и кристаллическая соль в осадке отсутствуют ($C_i = C_b = 0$). Базовые переменные P и T определяются из пьезопроводного (43) и дольно-солевого (44) уравнений.

2. Солевой осадок и жидкая фаза в ГРЗ с насыщенными газом и солью.

$$\pi_2 = \{P, C_l\}, T = T_{dis}(P), C_i = 0, C_b = 1 - C_l, \beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c, \beta_l^g = \beta_l^g(P, T), \beta_l^c = \beta_l^c(P, T).$$

В ГРЗ жидкая фаза выше температуры замерзания содержит насыщенный в воде газ (либо его отсутствие, $\beta_l^g = 0$), насыщенный раствор соли и кристаллический солевой осадок ($C_b > 0$), фазово-соприкасающийся в поровом пространстве с остальными фазами. Согласно правилу фаз Гиббса трехкомпонентная четырехфазная (гидрат, свободный газ, жидкость, солевой осадок) система содержит одну термодинамическую степень свободы ($3+2-4=1$), которую можно сформулировать в виде зависимости температуры диссоциации от давления $T = T_{dis}(P)$. Лед отсутствует ($C_i = 0$). Базовые переменные P и C_l определяются из пьезопроводного (43) и дольно-солевого (44) уравнений.

3. Ненасыщенная солью жидко-ледяная смесь в ГРЗ.

$$\pi_2 = \{C_l, \beta_l^c\}, P = P(\beta_l^c), T = T_{dis}(P), C_i = 1 - C_l, C_b = 0, \beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c, \beta_l^g = \beta_l^g(P, T).$$

В ГРЗ при температуре замерзания жидкости существуют жидко-ледяная (с насыщенным в жидкости газом, либо его отсутствием, и растворенной ненасыщенной солью) и свободно-газовая смесь, фазово-соприкасающаяся с твердым гидратом. Кристаллический осадок соли отсутствует ($C_b = 0$). Согласно правилу фаз Гиббса трехкомпонентная четырехфазная (гидрат, свободный газ, жидкость, лед) система содержит одну термодинамическую степень свободы ($3+2-4=1$), представленную зависимостью температуры

диссоциации от давления $T = T_{dis}(P)$. Считается также, что температура замерзания жидкости зависит от массовых долей, растворенных в ней соли, газа и давления $T = T_{frz}(P, \beta_l^s, \beta_l^c)$. Поэтому из соотношения $T_{dis} = T_{frz}(P, \beta_l^s, \beta_l^c)$ определяется зависимость давления от массовой доли растворенной в жидкости соли $P = P(\beta_l^c)$. Базовые переменные C_l и β_l^c определяются из пьезопроводного (43) и дольно-солевого (44) уравнений.

4. Насыщенная солью жидко-ледяная смесь в ГРЗ.

$$\pi_2 = \{P, C_l\}, \quad T = T(P), \quad C_i = 1 - C_l, \quad C_b = 0, \quad \beta_l^w = 1 - \beta_l^s - \beta_l^c, \quad \beta_l^s = \beta_l^s(P, T), \\ \beta_l^c = \beta_l^c(P, T).$$

Рассматривается тот же случай, что и в варианте 3, но жидкий раствор соли становится насыщенным ($\beta_l^c = \beta_l^c(P, T)$). Кристаллический осадок соли по-прежнему отсутствует ($C_b = 0$). Правило фаз Гиббса для одной термодинамической степени свободы ($T = T_{dis}(P)$) теперь конкретизируется насыщенностью солевого раствора ($\beta_l^c = \beta_l^c(P, T)$). Т.е. можно написать $T = T_{frz}(P, \beta_l^s(P, T), \beta_l^c(P, T))$, откуда определяется зависимость $T = T(P)$. Базовые переменные P и C_l определяются из пьезопроводного (43) и дольно-солевого (44) уравнений.

5. Солевой осадок и жидко-ледяная смесь в ГРЗ.

$$\pi_2 = \{C_l, C_i\}, \quad P_0, T_0, \quad C_b = 1 - C_l - C_i, \quad \beta_l^w = 1 - \beta_l^s - \beta_l^c, \quad \beta_l^s = \beta_l^s(P_0, T_0), \\ \beta_l^c = \beta_l^c(P_0, T_0).$$

Рассматривается тот же случай, что и в вариантах 3 – 4, но, помимо насыщенного солью раствора в жидкой фазе ($\beta_l^c = \beta_l^c(P, T)$), имеется еще кристаллический осадок соли ($C_b > 0$) как твердая фаза, соприкасающаяся в поровом пространстве с остальными четырьмя (гидрат, свободный газ, жидкость, лед) фазами системы. Согласно правилу фаз Гиббса трехкомпонентная пятифазная система содержит ноль термодинамических степеней свободы ($3+2-5=0$). Поэтому давление P_0 и температура T_0 являются константами, определяемыми для данного процесса экспериментально. Для температуры замерзания жидкости будем иметь $T_0 = T_{frz}(P_0, \beta_l^s(P_0, T_0), \beta_l^c)$. Откуда массовая доля соли в жидком растворе определится как $\beta_l^c = \beta_l^c(P_0, T_0)$. Отметим, что эта математическая выкладка не предполагала жидкий раствор соленасыщенным. Уравнениями пьезопроводности (43) и дольно-солевым (44) теперь будут определяться базовые переменные C_l и C_i .

6. Солевой осадок в ГРЗ в отсутствие жидкой фазы.

$$\pi_2 = \{P, C_i\}, T = T_{dis}(P), C_l = 0, C_b = 1 - C_i.$$

В поровом пространстве ГРЗ ниже температуры замерзания жидкости ($C_l = 0$) гидрат и свободный газ фазово соприкасаются с твердыми фазами льда и солевого осадка ($C_b > 0$). Правило фаз Гиббса дает одну термодинамическую степень свободы, т.е. $T = T_{dis}(P)$. Поскольку $C_l = 0$, то в отсутствие жидкой фазы ее массовые доли $\beta_l^w, \beta_l^g, \beta_l^c$ в системе также не присутствуют. Базовые переменные P и C_i определяются пьезопроводным (43) и дольно-солевым (44) уравнениями.

7. Бессолевая ГРЗ в отсутствие жидкой фазы.

$$\pi_1 = \{P\}, T = T_{dis}(P), C_l = 0, C_i = 1, C_b = 0.$$

Рассматривается тот же случай, что и в варианте 6, но соль в системе вообще отсутствует ($C_l = C_b = 0$). Правило фаз Гиббса для двухкомпонентной трехфазной (гидрат, газ, лед) системы дает одну термодинамическую степень свободы ($2+2-3=1$), т.е. $T = T_{dis}(P)$. Единственная базовая переменная P определяется уравнением пьезопроводности (43). Дольно-солевое уравнение (44) переходит в нулевое тождество, т.к. в нем $R_{cb} = 0$ при $C_l = C_b = 0$. Бессолевая ГРЗ (в случае отсутствия в жидкой фазе растворенного газа) подробно изучалась с помощью расщепления по физическим процессам в ряде работ, начиная с [3].

Полученные результаты можно представить в виде следующей таблицы:

| Фазовое состояние | Состав фаз | Базовые переменные | Дополнительные ограничения |
|---|----------------|----------------------------------|--|
| 1. Жидкая фаза в ГРЗ с насыщенными газом и солью | ν, g, l | S_ν, S_{lib}, P, T | $C_l = 1, C_i = C_b = 0,$ $\beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c,$ $\beta_l^g = \beta_l^g(P, T), \beta_l^c = \beta_l^c(P, T).$ |
| 2. Солевой осадок и жидкая фаза в ГРЗ с насыщенными газом и солью | ν, g, l, b | S_ν, S_{lib}, P, C_l | $T = T_{dis}(P), C_i = 0, C_b = 1 - C_l,$ $\beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c,$ $\beta_l^g = \beta_l^g(P, T), \beta_l^c = \beta_l^c(P, T).$ |
| 3. Ненасыщенная солью жидко-ледяная смесь в ГРЗ | ν, g, l, i | $S_\nu, S_{lib}, C_l, \beta_l^c$ | $P = P(\beta_l^c), T = T_{dis}(P), C_b = 0,$ $C_i = 1 - C_l, \beta_l^g = \beta_l^g(P, T),$ |

| | | | |
|--|-------------------|----------------------------|--|
| | | | $\beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c$. |
| 4. Насыщенная солью жидко-ледяная смесь в ГРЗ | ν, g, l, i | S_ν, S_{lib}, P, C_l | $T = T(P), C_i = 1 - C_l, C_b = 0,$ $\beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c,$ $\beta_l^g = \beta_l^g(P, T), \beta_l^c = \beta_l^c(P, T).$ |
| 5. Солевой осадок и жидко-ледяная смесь в ГРЗ | ν, g, l, i, b | S_ν, S_{lib}, C_l, C_i | $P_0, T_0, C_b = 1 - C_l - C_i,$ $\beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c,$ $\beta_l^g = \beta_l^g(P_0, T_0), \beta_l^c = \beta_l^c(P_0, T_0)$ |
| 6. Солевой осадок в ГРЗ в отсутствие жидкой фазы | ν, g, i, b | S_ν, S_{lib}, P, C_i | $T = T_{dis}(P), C_l = 0, C_b = 1 - C_i.$ |
| 7. Бессолевая ГРЗ в отсутствие жидкой фазы | ν, g, i | S_ν, S_{lib}, P | $T = T_{dis}(P), C_l = 0, C_i = 1,$ $C_b = 0.$ |

Процесс переноса насыщенностей S_ν и S_{lib} , происходящий на фоне фиксированных значений расщепленных переменных вектора π_2 , может быть описан уравнениями водного и газового массобалансов (39) – (40) с законом Дарси в отсутствии гравитации. При этом в абсолютной проницаемости $k(\mathbf{r}, S_\nu, P)$, зависящей от гидратной растеплённости S_ν , выполняется перерасчет $k_{/ib} = k(\mathbf{r}, S_{\nu/ib}, P)$, учитывающий занятость части пор помимо гидрата еще льдом и солевым осадком. Здесь

$$S_{\nu/ib} = S_\nu(1 - C_{ib}S_{lib}), C_{ib} = C_i + C_b, C_l + C_{ib} = 1.$$

Также относительные фазовые проницаемости жидкости $k_{rl} = k_{rl}(S_l)$ и свободного газа $k_{rg} = k_{rg}(1 - S_l)$ учитывают подвижность в S_{lib} -консистенции только жидкой фазы

$$S_l = \frac{C_l S_{lib}}{C_l S_{lib} + (1 - S_{lib})} = \frac{C_l S_{lib}}{1 - C_{ib} S_{lib}}.$$

Массовая доля газа в жидкости при анализе гиперболичности процесса переноса насыщенностей S_ν и S_{lib} предполагается малой, т.е. $\beta_l^g \rightarrow 0$.

Аналогично исследованиям, выполненным в разделе 2, применительно к (39) – (40) получим, что для вычислительной устойчивости разностной схемы надо обеспечить наветренность аппроксимации абсолютной и относительных проницаемостей по насыщенностям S_ν и S_{lib} в следующем виде:

1. В абсолютной проницаемости $k_{lib} = k(\mathbf{r}, S_{v/lib}, P)$ растеplённость S_v необходимо брать вниз по потоку скорости, а S_{lib} - насыщенность берется вверх по потоку при $[-\frac{\beta_l^w \rho_l}{R_{wi}} \frac{k_{rl}(S_l)}{\mu_l} \Psi_g + \frac{k_{rg}(1-S_l)}{\mu_g} \Psi_{lib}] > 0$ и, наоборот, вниз по потоку скорости при противоположном смысле неравенства.
2. В относительных проницаемостях $k_{rl}(S_l)$ и $k_{rg}(1-S_l)$ S_{lib} - насыщенность берется вверх по потоку при $\{\frac{\beta_l^w \rho_l}{R_{wi}} \frac{[k_{rl}(S_l)]'_{S_l}}{\mu_l} \Psi_g - \frac{[k_{rg}(1-S_l)]'_{S_l}}{\mu_g} \Psi_{lib}\} > 0$.

Здесь введены предполагающиеся положительными удельные массовые доли скачков объёма при фазовом разложении гидрата в свободный газ и S_{lib} - консистенцию:

$$\frac{\Psi_g}{m\rho_v} = \frac{1-\beta_w}{\rho_g} - \frac{1-S_{lib}}{\rho_v} > 0 \text{ при } S_{lib} > S_{lib \min},$$

$$\frac{\Psi_{lib}}{m\rho_v} = \frac{\beta_w}{R_{wi}} - \frac{S_{lib}}{\rho_v} > 0 \text{ при } S_{lib} < S_{lib \max}.$$

Таким же образом исследуется наветренность аппроксимаций объемных долей в S_{lib} -консистенции и массовых долей в жидкой фазе, являющихся базовыми переменными (π_2) в расщепленных векторах π_2 в пьезопроводном и дольно-солевом уравнениях.

Для аппроксимаций пространственных операций векторного анализа *div*, *grad* в модели для данного класса задач используется метод опорных операторов [10], применение которого к задачам фильтрации, начатое в работе [11], распространилось и на задачи, связанные с газовыми гидратами [5].

Для эволюционных дискретных преобразований исходной дивергентной системы массовых и энергетических балансов в пьезопроводное и дольно-солевое уравнения используется метод свободно-объемной аппроксимации сеточных функций по времени, зависящей от доли объёма в порах, занятом флюидами. Метод является простым в реализации [5].

5. Заключение

В работе рассмотрена задача фильтрации многофазных и многокомпонентных течений для пористых сред с совместными твердофазными включениями из гидратов и водно-ледяной смеси, а также ее расширение, связанное с учетом возможных твердофазных солевых осадочных включений. Рассмотрены различные виды насыщенности водно-ледяной смеси газом и солью, а также солевой осадок в гидратно-равновесной зоне в отсутствие жидкой фазы. На основании правила фаз Гиббса для систем с одной термодинамической степенью свободы определены различные виды диссоциативных связей между термодинамическими переменными в рассматриваемых задачах. С помощью метода расщепления по физическим процессам реализована двухблочная математическая модель, позволяющая выделить в соответствующей системе уравнений гиперболическую и диссипативную подсистемы, что позволяет строить эффективные численные методы для решения подобных задач.

Библиографический список

1. Liu X., Flemings P.B. Dynamic multiphase flow model of hydrate formation in marine sediments // *J. Geophys. Res.* 2007. V.112. B03101. P. 1–23.
2. Малахова В.В., Елисеев А.В. Влияние диффузии солей на состояние и распространение многолетнемёрзлых пород и зоны стабильности метангидратов шельфа моря Лаптевых // *Лёд и Снег.* 2020. Т. 60. № 4. С. 533–546.
3. Повещенко Ю.А., Казакевич Г.И. Математическое моделирование газогидратных процессов // *Математические машины и системы.* 2011. № 3. С. 105–110.
4. Дегтярев Б.В., Бухгалтер Э.Б. Борьба с гидратами при эксплуатации газовых скважин в северных районах. М.: Недра, 1976. 195 с.
5. Рагимли П.И., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Рагимли О.Р., Попов С.Б. Моделирование процессов совместной фильтрации в талой зоне и пьезопроводной среде с газогидратными включениями // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* 2018. № 40. 32 с.
6. Clennell M.B., Winters W.J., Hovland M., Booth J.S., Henry P. Formation of natural gas hydrates in marine sediments: 1. Conceptual model of gas hydrate growth conditioned by host sediment properties // *J. Geophys. Res.* 1999. № 104. P. 22985–23003.
7. Xu W. Modeling dynamic marine gas hydrate systems // *Am. Mineral.* 2004. № 89. P. 1271–1279.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976.

- 584 с.
9. Epstein N. On tortuosity and the tortuosity factor in flow and diffusion through porous media // Chemical Engineering Science. 1989. № 44 (3). P. 777–779. DOI :10.1016 / 0009-2509 (89) 85053-5.
 10. Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск, 1996. 273 с.
 11. Дмитриевский А.Н., Лобковский Л.И., Казакевич Г.И., Повещенко Ю.А., Баланюк И.Е., Илюхин Л.Н. Численное моделирование движения флюидов в процессе формирования залежей углеводородов на примере Предверхоянского прогиба // Геология, геофизика и разработка нефтяных месторождений. 1995. № 7. С. 2–6.

Оглавление

| | |
|--|----|
| 1. Введение..... | 3 |
| 2. Расщепление по физическим процессам в математической модели системы «газ – вода – газовые гидраты – лед»..... | 4 |
| 3. Исследование сатурационного блока методом характеристик | 8 |
| 4. Расщепление по физическим процессам в математической модели системы «газ – вода – газовые гидраты – лед – соль» | 14 |
| 5. Заключение..... | 25 |
| Библиографический список..... | 25 |